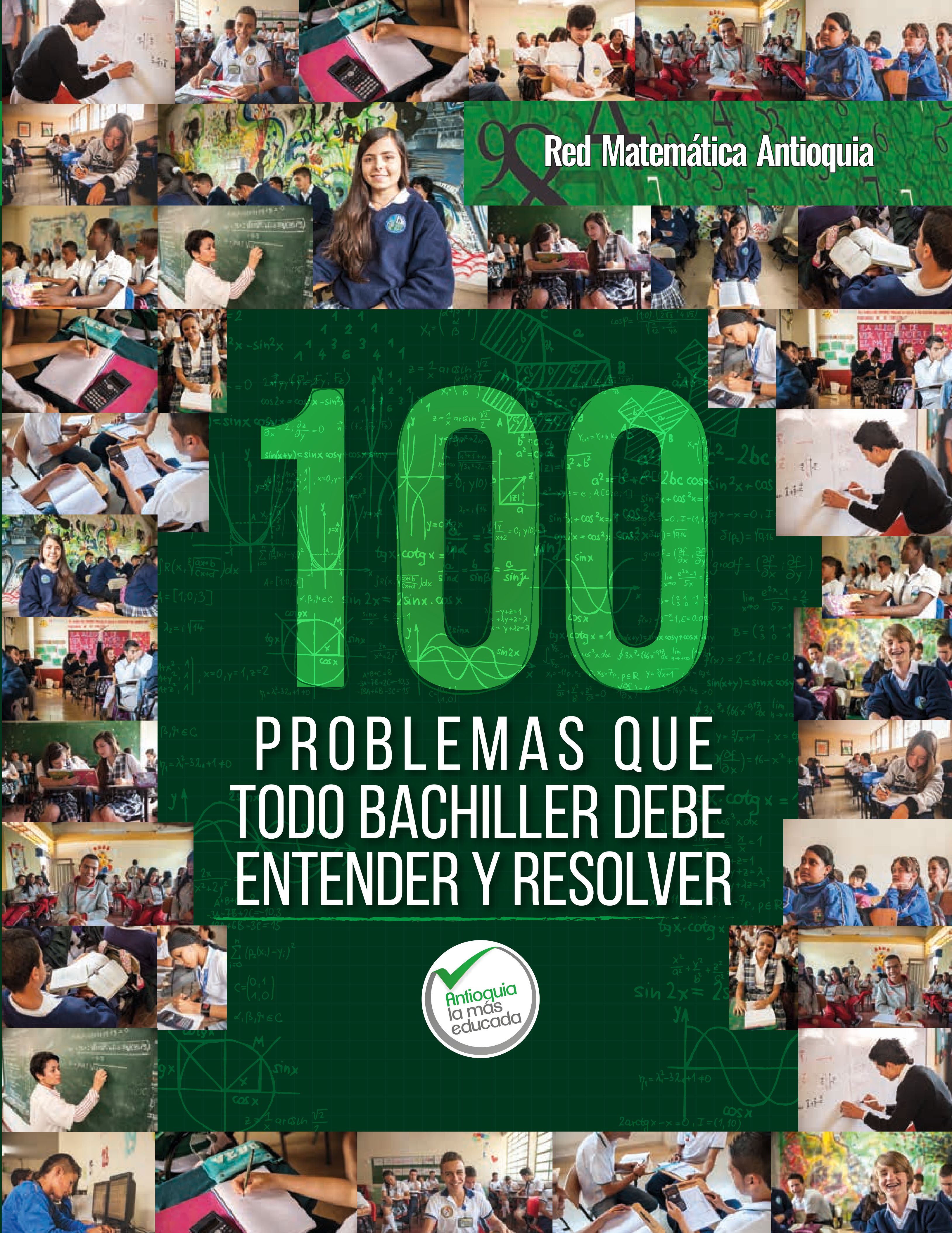
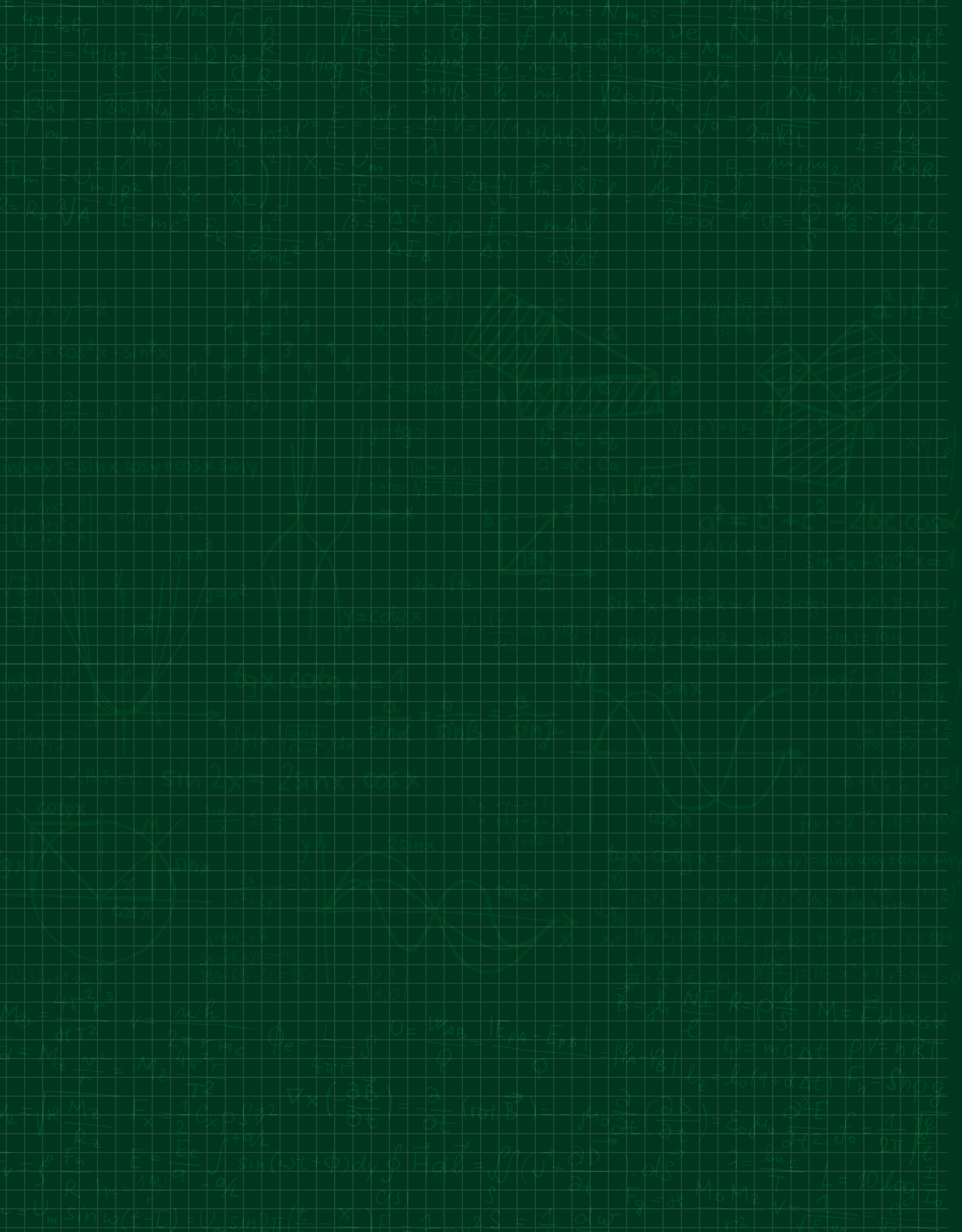
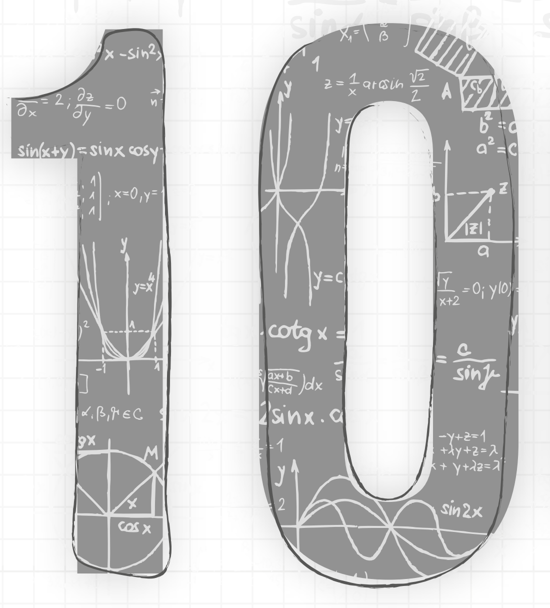
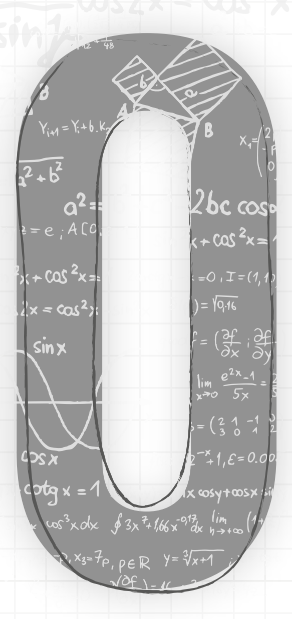

Red Matemática Antioquia
100
PROBLEMAS QUE
TODO BACHILLER DEBE
ENTENDER Y RESOLVER
Antioquia
la más
educada



Red Matemática Antioquia

100 PROBLEMAS QUE TODO BACHILLER DEBE ENTENDER Y RESOLVER





100 problemas que todo bachiller debe entender y resolver
Una publicación de la GOBERNACIÓN DE ANTIOQUIA
Primera edición: abril, 2015
Hace parte del Plan de mejoramiento de la enseñanza
y apropiación de las matemáticas en Antioquia 2012 – 2015

Sergio Fajardo Valderrama
Gobernador

Andrés Felipe Gil Barrera
Secretario de Educación

Horacio Arango Marín
Asesor Educación
Selección y solución de los 100 problemas que todo bachiller debe entender y resolver

Diseño y diagramación: Luisa Santa
Impresión: Litografía Dinámica
Medellín

Gobernación de Antioquia
Antioquia la más educada
www.antioquia.gov.co

TABLA DE CONTENIDO

PRÓLOGO

Con certeza, la emoción que más se asocia con la palabra matemáticas es problema. Para quienes amamos las matemáticas, los problemas son la esencia y alegría de ese mundo mágico que empieza con los números y llega más allá de las fronteras del infinito, en las alturas de las abstracciones más profundas que los humanos jamás hayamos construido y conocido.

Pero la realidad es que esa alegría, dado el número de habitantes del planeta, la compartimos muy pocas personas. Para la gran mayoría las matemáticas son dificultad, obstáculo, molestia o, dicho de otra manera, un dolor de cabeza. El lío es que este dolor dura muchos años. A veces, toda una vida.

Desde que entramos a la guardería, ya tenemos que vérnoslas con los números y así, año tras año, en el colegio y en la gran mayoría de programas de educación superior. Es importante aclarar que esto no se debe a la decisión caprichosa de las autoridades educativas, confabuladas para hacerles la vida imposible a niños y niñas. La razón está en que no es exagerado afirmar que el universo se expresa en el lenguaje de las matemáticas, y si queremos comprenderlo y transformarlo, estamos obligados a conocer sus secretos, y por supuesto a conocer muy bien su lenguaje.

El espacio que tengo es muy reducido para extenderme en el protagonismo de las matemáticas en la vida de las personas. Baste con decirles que las matemáticas están por todos lados, muchas veces pasan inadvertidas, pero ahí están, y sin vacilar me atrevo afirmar que si queremos ser parte de este mundo, en nuestro equipaje debemos cargar por lo menos con una dosis mínima de conocimiento matemático. Por eso tenemos que estudiarlas durante tantos años.

Como es de esperarse, las matemáticas suscitan numerosas y acaloradas polémicas. Así ocurre con los temas verdaderamente trascendentales en la vida. Pero, polémicas aparte, nosotros en Antioquia la más educada nos hemos propuesto hacer de este un mundo mejor y por lo tanto es lógico que mejoremos los conocimientos matemáticos de nuestros estudiantes. ¿Y saben cómo vamos a hacerlo?

Poniéndoles más problemas. No se alarmen, para alcanzar un conocimiento razonable de matemáticas, que nos sea útil para la vida, tenemos que resolver muchos problemas. Con muy contadas excepciones, a la mayoría de los humanos nos toca ganarnos el pan con el sudor de la frente y aprender matemáticas dedicando muchas horas a hacer problemas.

De cualquier forma, no es para asustarse. Las cosas no son tan difíciles como a veces parecen. De hecho, estamos convencidos de que resolver problemas matemáticos es una actividad divertida. Esta colección de problemas es una muestra. Trabájenlos, dedíquenles tiempo, disfrútenlos con sus amistades, en el colegio con sus docentes, en la casa cada noche, en fin, ¡ahora los problemas son de ustedes! Si los saben resolver, van por muy buen camino, no lo duden. Se puede.

Sergio Fajardo Valderrama
Gobernador de Antioquia

100 PROBLEMAS
QUE TODO BACHILLER DEBE ENTENDER Y RESOLVER

"Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases.

Los conceptos elementales que se recogen en los textos de la Red Matemática Antioquia son las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno que aspire a tener un buen desempeño en Matemáticas. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto.

Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de aprender Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco poniendo cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes.

Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal puestos es muy posible que el muro se derrumbe.

Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario repasar lo mismo muchas veces, aunque parezca monótono y repetitivo, de esta forma podremos enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas" (Sociedad Colombiana de Matemáticas).

Hemos seleccionado 100 ejercicios de Matemáticas de las áreas de Aritmética, Geometría, Álgebra, Teoría de Conjuntos, Matemáticas Financieras, Geometría Analítica, Trigonometría, Pre Cálculo y Estadística Descriptiva.

Estos ejercicios se han construido a partir de los problemas publicados por las Olimpiadas del Conocimiento, por los Retos Matemáticos de la Red, en los exámenes de admisión de diferentes universidades, en las Pruebas Saber y Pisa, y en las diferentes bases de datos de las Olimpiadas de Matemáticas que circulan en internet, como las mexicanas, españolas, venezolanas, bolivianas, etc.

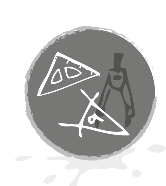
Para trabajar los ejercicios consideramos necesario repasar o estudiar los conceptos teóricos que son esenciales para conocer, comprender y desarrollar las Matemáticas y para lograr una buena formación y desempeño en Matemáticas durante el bachillerato. A continuación haremos una enumeración de estos conceptos teóricos en las diferentes áreas de la matemática:

ARITMÉTICA



1. Los números naturales, operaciones, propiedades y sistemas de numeración.
2. Los números enteros, operaciones, propiedades, valor absoluto de un número.
3. Números primos, descomposición en factores primos. Teorema fundamental de la aritmética.
4. Criterios de divisibilidad, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.
5. Los números racionales, operaciones, propiedades, relaciones de orden.
6. Los números reales, propiedades, intervalos, aproximación de números reales.
7. Proporciones, porcentajes, magnitudes, regla de tres simple y compuesta.
8. Progresiones aritméticas, geométricas, sumatorias.

GEOMETRÍA

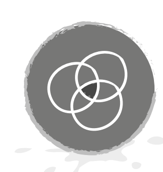


9. Puntos, rectas y segmentos de recta.
10. Congruencia y operaciones con segmentos de recta.
11. Ángulos y clasificación de ángulos.
12. Perpendicularidad y paralelismo.
13. Ángulos formados por rectas cortadas por una secante.
14. Triángulos, clasificación de triángulos, congruencia de triángulos.
15. Rectas en el triángulo y Proporcionalidad de segmentos de recta.
16. Semejanza de triángulos.
17. Cuadriláteros, cuadriláteros especiales, polígonos, áreas, perímetro.
18. Teorema de Pitágoras.
19. La circunferencia y sus propiedades.

ÁLGEBRA

20. Concepto de variable: números y letras.
21. Polinomios: suma, resta, multiplicación y división de polinomios.
22. Factorización o descomposición en factores, productos y cocientes notables.
23. División sintética, teorema del residuo y teorema del factor.
24. Teorema fundamental del Álgebra, ecuaciones de primer grado o lineales.
25. Fracciones algebraicas: suma, resta, multiplicación y división.
26. Potenciación y radicación.
27. Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.
28. Sistema de dos ecuaciones lineales y determinantes.

TEORÍA DE CONJUNTOS



29. Definición, conjunto universal, conjunto vacío, diagramas de Venn, subconjuntos, inclusión y complemento de un conjunto.
30. Operaciones de unión, intersección y diferencia entre conjuntos.
31. Producto cartesiano, conjuntos infinitos, lógica proposicional.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y COMBINATORIA



32. Población, muestra, obtención de datos y su representación gráfica.
33. Frecuencia, histograma, media, varianza y percentiles.
34. Permutaciones, combinaciones y técnicas de conteo.

MATEMÁTICAS FINANCIERAS



35. Capital presente, futuro, interés simple.
36. Interés compuesto, capitalización.

TRIGONOMETRÍA



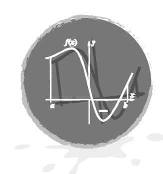
37. Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica.
38. Funciones trigonométricas de números reales.
39. Identidades trigonométricas.
40. Ecuaciones trigonométricas.
41. Resolución de triángulos: ley del seno, ley del coseno.

GEOMETRÍA ANALÍTICA



42. Línea recta, perpendicularidad y paralelismo.
43. Circunferencia.
44. Elipse, parábola, hipérbola.
45. Vectores algebraicos.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO



46. El plano cartesiano, representación de un punto en el plano.
47. Conjuntos reales, intervalos y valor absoluto.
48. Desigualdades lineales y cuadráticas.
49. Definición de n-factorial, coeficiente binomial y teorema del binomio.
50. Funciones, función biyectiva y función inversa, funciones pares e impares.
51. Función lineal, cuadrática, cúbica, polinómica y función racional.
52. Función exponencial y logarítmica.
53. Funciones trigonométricas.
54. Álgebra de funciones y composición de funciones.
55. Gráfica de las funciones en el plano cartesiano.

Al conocimiento de los conceptos básicos lo debemos acompañar de una metodología para la resolución de problemas. En 1945 el matemático húngaro **George Polya**, en el prefacio de un texto aún vigente titulado *"How to Solve It "(Cómo plantear y resolver problemas)*, nos dice:

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por medios propios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimir una huella imperecedera en la mente y en el carácter".

A modo de ejemplo presentamos la solución de un problema de Matemáticas usando la metodología de Polya.

Ejemplo del método para resolver problemas matemáticos según Polya

Daniel con sus ahorros compró, por cuotas, un libro de Julio Verne y lo pagó de la siguiente manera: la primera semana abonó $\frac{3}{8}$ de sus ahorros, la segunda semana $\frac{1}{6}$ y canceló en la tercera semana 2.200 pesos. ¿Cuantos pesos tenía ahorrados Daniel?

Solución

Primer Paso: Leer y comprender el problema.

Para poder resolver un problema primero hay que entenderlo. Se debe leer despacio y con mucho cuidado. Si en una primera lectura no se tiene claridad, volver a leerlo y analizarlo con los compañeros de estudio. Seguir explorando, hasta entender las relaciones dadas en la información proporcionada. Para ello podemos formularnos preguntas del siguiente tipo:

¿Qué nos dice el ejercicio? ¿Qué nos solicita encontrar? ¿Cuáles son los datos y las condiciones del problema? ¿Podemos hacer una figura, un esquema o un diagrama? ¿Podemos estimar la respuesta?

En nuestro caso lo que nos dice el problema es que Daniel va a gastar sus ahorros comprando un libro y lo paga por cuotas en tres semanas. Nos pregunta por el valor de los ahorros que tenía.

Y nos da la siguiente información sobre los datos y condiciones del problema.

En la primera semana utiliza $\frac{3}{8}$ de sus ahorros para pagar el libro, en la segunda $\frac{1}{6}$ y en la tercera semana cancela 2.200 pesos.

Con la siguiente gráfica representamos la información dada en el enunciado del problema:

Pagos semanales

1°semana	2°semana	3°semana
$3/8$	$1/6$	2.200

Segundo paso: Elaborar un plan o definir una estrategia.

En esta fase tratamos de hallar relaciones entre los datos y el tipo de respuesta que nos piden hallar. Se debe elaborar un plan o estrategia para hallar la respuesta solicitada.

Debemos definir cómo denominamos los datos y las incógnitas, definir cuáles son las operaciones que las relacionan e indicar las etapas para realizarlas.

Algunas preguntas que se pueden responder en esta fase son:

¿Conoce otro problema análogo que le ayude? ¿Puede escribir de otro modo el enunciado?

¿Qué notación se va escoger para denominar los datos y las incógnitas? ¿Usó todos los datos, condiciones? ¿Tratamos de organizar los datos en tablas o gráficos? ¿Existen diferentes alternativas de solución del problema? Pensada una estrategia ¿se puede realizar?

Denominamos con la letra x la cantidad de ahorros, en pesos, que gasta Daniel en la compra del libro.

Pagos de la primera semana $\frac{3x}{8}$ pesos. Pagos de la segunda semana $\frac{1x}{6}$ pesos. Pagos de la tercera semana 2.200 pesos.

El total de ahorros x es igual a la suma de los gastos durante las tres semanas y esta información la podemos escribir como una ecuación algebraica:

$$x = \frac{3x}{8} + \frac{x}{6} + 2.200$$

Tercer paso: Ejecutar el plan.

De acuerdo a la estrategia definida en primera instancia, realizamos las operaciones en el orden establecido, verificando paso a paso si los resultados están correctos. Si en la verificación encontramos errores lógicos en el planteamiento debemos redefinir o buscar otras alternativas de solución. Si se encuentran errores numéricos en los cálculos, basta hacer las correcciones debidas. Si no se tiene éxito en la primera búsqueda de la solución es necesario volver a empezar con paciencia con la seguridad que estos intentos son experiencias positivas para enfrentar nuevos retos.

Para resolver esta ecuación agrupamos todos los términos que contienen la incógnita x en el lado derecho de la ecuación y obtenemos:

$x - \frac{3x}{8} - \frac{x}{6} = 2.200$. La suma de estos fraccionarios la realizamos encontrando el mínimo común múltiplo de 8, 6 y 1 es decir, el $mcm(8,6,1) = 24$. Entonces:

$\frac{24x - 9x - 4x}{24} = 2.200$. Simplificando la expresión algebraica tenemos $\frac{11x}{24} = 2.200$ y así encontramos el valor de la incógnita $x = \frac{2.200 \times 24}{11} = 200 \times 24 = 4.800$

De esta manera podemos afirmar que los ahorros que tenía Daniel eran 4.800 pesos.

Cuarto paso: Hacer la verificación.

En la verificación analizamos la solución obtenida, revisando si la respuesta es correcta y cumple con los datos y condiciones del enunciado y adicionalmente pensamos si podríamos usar otro plan diferente al realizado. En esta etapa podemos también hacer una generalización del problema o formular otros nuevos a partir de él. Para ello podemos preguntarnos:

¿La respuesta tiene sentido? ¿Cumple con las condiciones establecidas en el

enunciado? ¿Hay otra manera de hallar la solución? ¿Hay posibilidades de generalizar?

Sabiendo que $x = 4.800$, los pagos realizados son: En la primera semana $\frac{3\times 4.800}{8} = 1.800$ En la segunda $\frac{1\times 4.800}{6} = 800$ y en la tercera semana 2.200

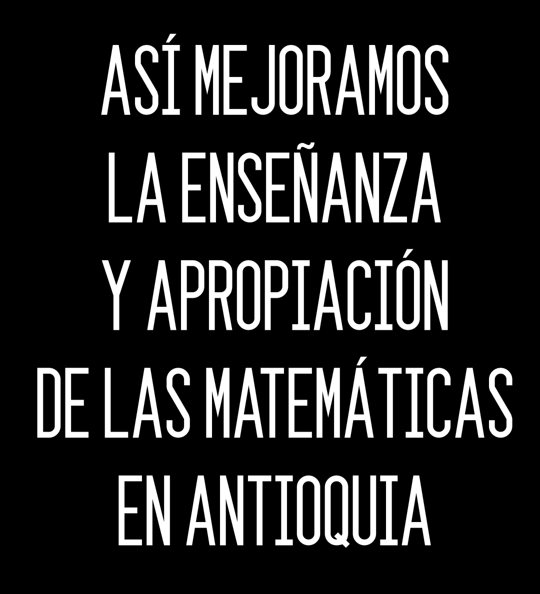
Sumando $1.800 + 800 + 2.200 = 4.800$.

Dejamos al lector la búsqueda de otros problemas análogos al que hemos resuelto.

En la parte final de este trabajo suministraremos toda la bibliografía usada, así como las direcciones de internet de las bases de problemas consultadas.

Esperamos que estos problemas y sus soluciones sean una fuente de aprendizaje para los estudiantes y que además les permita abordar con éxito el ingreso a la Universidad, así como tener un desempeño académico adecuado en las carreras que hayan elegido e ingresado.

RED MATEMÁTICA ANTIOQUIA
2015





PROCESOS FORMATIVOS

- Diplomados 'La matemática en la escuela' y 'La enseñanza de las matemáticas en la educación básica'.
- Encuentro con los Números.

PRODUCCIÓN ACADÉMICA

- 5 textos de las 90 lecciones de Pre cálculo, Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y el libro de Aritmética para grados 6 y 7.
- 5 textos de nociones en Aritmética, Álgebra, Geometría, Pre cálculo y Trigonometría.
- 6 cursillos cortos de Aritmética y Geometría para profesores de primaria.
- 6 planes de área desde el grado sexto hasta undécimo con todas las guías y ejercicios de cada clase.
- Libro '100 problemas que todo bachiller debe entender y resolver'.

PARA ESTUDIANTES

- 1.500 juegos de libros para las bibliotecas de las Instituciones Educativas.
- 700 memorias USB con material pedagógico y académico para las Instituciones Educativas.
- 49 Clubes de Matemáticas y material académico para sus integrantes.

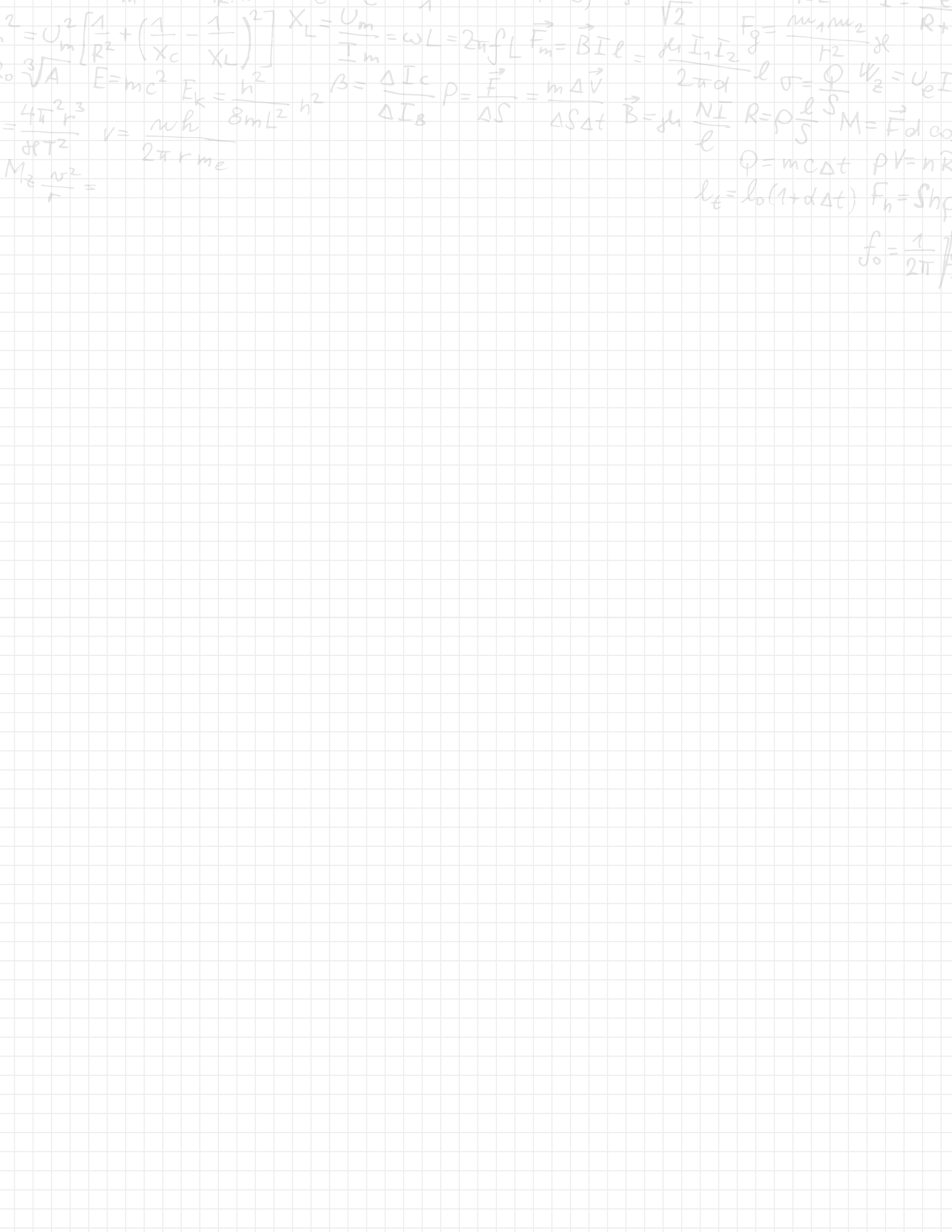
PARA ACERCAR LA COMUNIDAD A LAS MATEMÁTICAS

- 120 Retos Matemáticos.
- 5 Festivales de los Números.
- 3 versiones de Olimpiadas del Conocimiento.
- Metaportal www.antioquiadigital.edu.co.
- Apoyo académico a los Parques Educativos.
- Interacción a través de las redes sociales Facebook, Twitter y YouTube.

- Serie de 60 videos de 'Matemáticas con el Gobernador' sobre Geometría, Álgebra, Trigonometría y Pre cálculo.
- Video 'Un modelo de clase para la enseñanza de las matemáticas'.
- Serie de 12 videos 'De Pitágoras a Cantor' para la divulgación matemática.
- Serie de 12 videos de enseñanza del software 'Geogebra en línea'.
- Serie de 25 videos 'Comprendo, calculo y resuelvo' con ejercicios de las Pruebas Saber, exámenes de admisión universitarios y Prueba PISA.

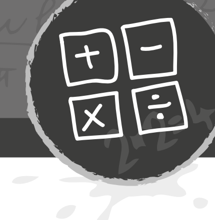
DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- 2.000 textos impresos para los profesores inscritos en los diplomados.
- 800 memorias USB para profesores que participan en procesos formativos.
- 2.000 textos impresos para los Encuentros con los Números.





PROBLEMAS



ARITMÉTICA

1 

Resolver: $\{31-[17\times(23-20)-150\div 6]+9\times 2\}\div 23$

2

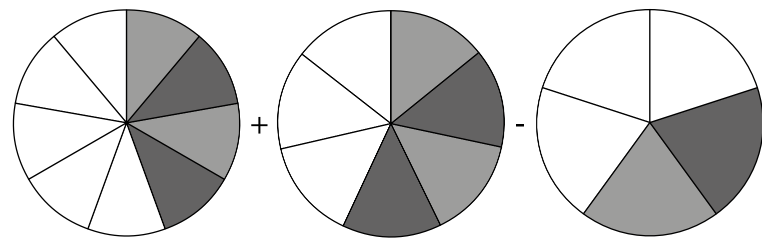
Hallar la respuesta de la siguiente suma de fraccionarios $-\frac{19}{5}+\frac{19}{9}-\frac{17}{3}+\frac{23}{15}-\frac{2}{45}$

3

La familia Restrepo consumió el domingo $\frac{1}{2}$ de una pizza y el lunes consumió $\frac{2}{7}$ del resto de la pizza. ¿Cuánta cantidad de pizza les falta por consumir?

4

Al realizar las operaciones propuestas con las áreas sombreadas de los tres círculos de áreas unitarias que se muestran en la figura. ¿Cuál es el resultado?



5

Determinar el mínimo común múltiplo de 5, 8 y 10 y el máximo común divisor de 18, 45, 63.

6

Felipe, ¿puedes encontrar dos números enteros positivos p y q que cumplen la siguiente condición: el máximo común divisor de p y q es 10, $mcd(p,q)=10$ y el mínimo común múltiplo de p y q es 240, $mcm(p,q)=240$?

7

Daniel realiza la división $\frac{1}{7}$, la cual no es exacta y por ello continuó realizando la división hasta que obtuvo 2.000 cifras después de la coma decimal. ¿Cuál es la última cifra que Daniel obtuvo?

8

Hallar todos los números enteros positivos de dos cifras ab tales que: $\frac{ab}{ba}=\frac{7}{4}$

9

¿Cuánto suman los primeros 100 dígitos que aparecen después de la coma al desarrollar $\frac{1}{13}$?

10

¿Cuál número de estos números $999!$ o 500^{999} es el mayor? Explicar la respuesta.

11

Cuáles son las dos últimas cifras del resultado de la suma $\sum_{n=1}^{n=1645} n!$
En donde $n!=1\times2\times3\times.....\times(n-1)\times n$

12

En Cisneros, tres trapiches A, B y C producen la panela de la siguiente manera: por cada 7 kilos de panela que produce el trapiche A, el B produce 5 y por cada 3 kilos que produce B, el trapiche C produce 2. En ocho horas, el trapiche A produjo 550 kilos más que el C. ¿Cuántos kilos produjo el trapiche B en esas 8 horas?

13

En una vivienda rural hay un tanque de almacenamiento de agua potable de 2.400 litros. El tanque tiene dos tuberías que lo llenan en 10 y 12 horas respectivamente. La tubería de desagüe lo puede vaciar en 20 horas. Si las tres tuberías se abren simultáneamente y luego se cierran, cuando el tanque se llena, ¿Cuántos litros salieron por la tubería de desagüe?

14

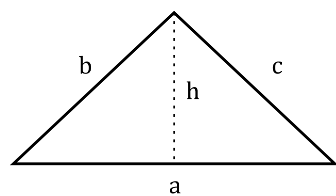
Daniel, ¿puedes encontrar los números enteros m y n que cumplen con la siguiente ecuación:
$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+...+\frac{1}{m\times n}=\frac{23}{47}$?



GEOMETRÍA

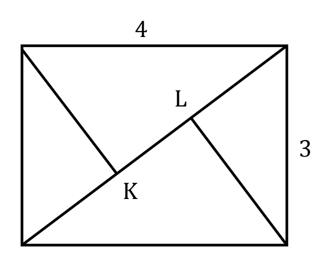
15

Determinar los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro $p=60\ cm$ y la altura sobre la hipotenusa $h=12\ cm$.



16

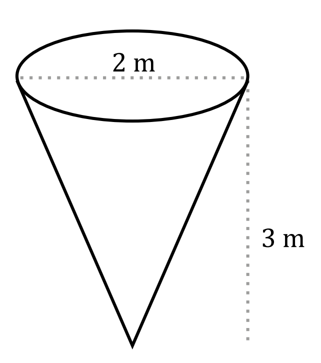
Si tomamos una hoja rectangular y la pegamos como se indica en la figura, obtenemos un rectángulo de $3\ cm$ por $4\ cm$.



Calcular las dimensiones de la hoja antes de plegarse.

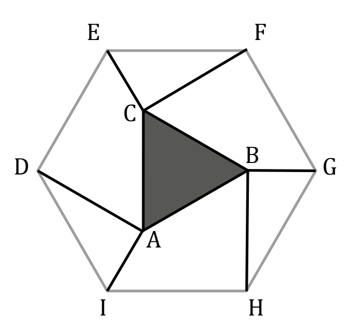
17

Se tiene un tanque en forma de cono recto invertido de $3\ m$ de altura y de $2\ m$ de diámetro en la parte superior. Si el tanque está parcialmente lleno de agua, con $1.8\ m$ desde el vértice hasta la superficie, calcule el radio de la superficie de agua.



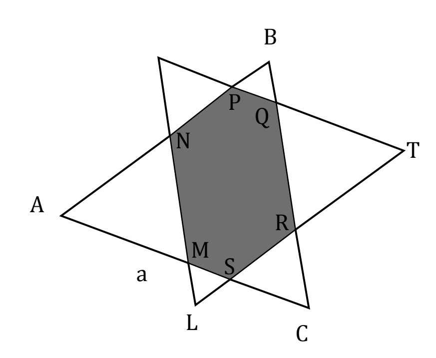
18

En un hexágono DEFGHI, Daniel y sus amigos dibujaron el triángulo ABC trazando rectas perpendiculares a los lados del hexágono en los vértices F, D y H. Luego trazaron perpendiculares a estas, desde los vértices E, G y I. Si el área del hexágono es de $196\ cm^2$, ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



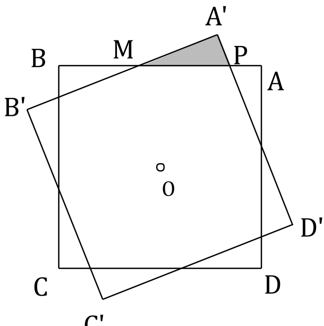
19

Raquel dibujó un triángulo equilátero ABC, de perímetro $3a\ cm$. Daniel superpuso sobre él, otro triángulo equilátero del mismo perímetro y con sus lados paralelos a los del triángulo ABC. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado MNPQRS?



20

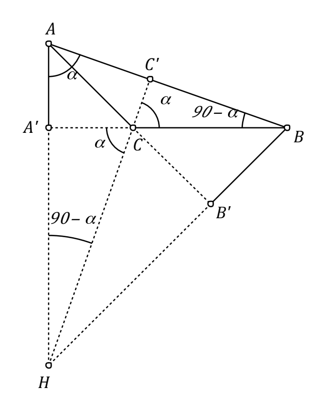
Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

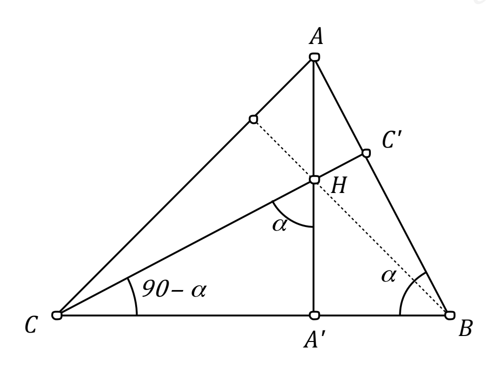


100 PROBLEMAS QUE TODO BACHILLER DEBE ENTENDER Y RESOLVER

21

Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo BCA.

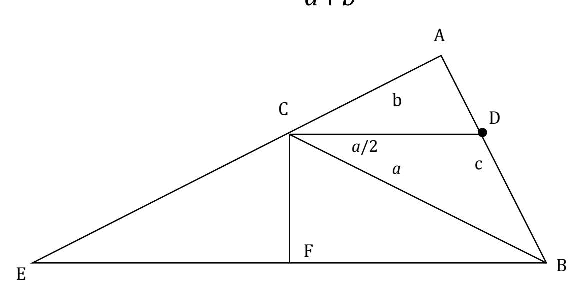




22

Dado un triángulo de vértices A, B y C, y con lados de longitud $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, llamemos D al punto de intersección del lado AB con la bisectriz del ángulo C. Entonces mostrar que CD es igual a:

$$CD = \frac{2ab \times \cos(\frac{C}{2})}{a+b}$$

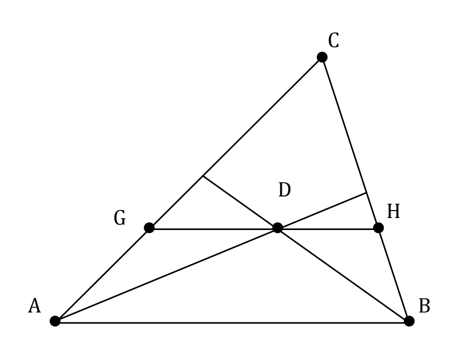


23

Si un punto situado en el interior de un triángulo equilátero dista de los vértices 3, 4 y 5 unidades. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

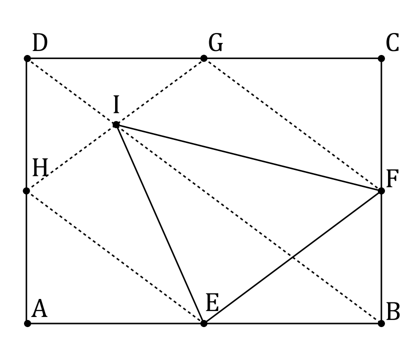
24

Los lados del triángulo ABC miden $AC = 26\ cm$, $AB = 17\ cm$ y $CB = 19\ cm$. Las bisectrices de los ángulos de vértices A y B se cortan en el punto D. Por D se traza una paralela a AB que corta a los lados AC y CB en los puntos G y H respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo CGH.



25

En el rectángulo ABCD los puntos E, F, G y H son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente, y I es el punto medio de HG. ¿Qué fracción del área del rectángulo ABCD tiene el triángulo EFI?

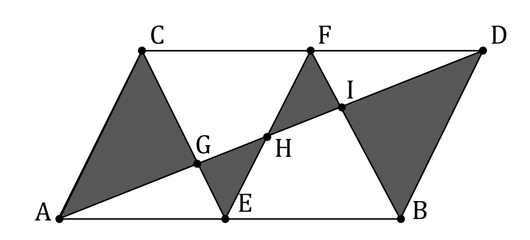


26

Una alfombra de $1\ cm$ de grosor es enrollada hasta formar un cilindro de un metro de diámetro. ¿Cuál es el valor mejor estimado del largo de la alfombra?

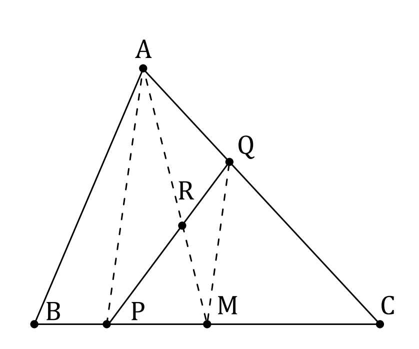
27

Si el paralelogramo ABCD tiene un área de 1 m^2 y los puntos E y F son los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente, ¿Qué área tiene la región sombreada?

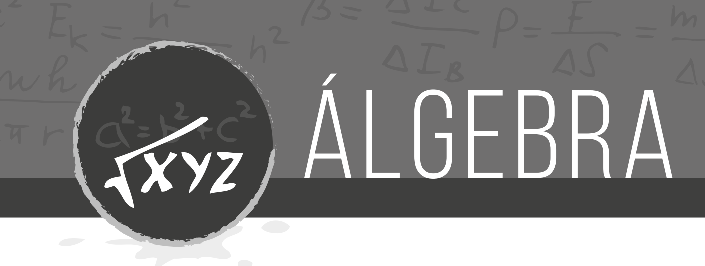


28

Dado un triángulo cualquiera ABC y un punto P situado en el lado BC, construir una recta que pase por P y divida el área del triángulo ABC en dos regiones de área igual.



RED MATEMÁTICA ANTIOQUIA - GOBERNACIÓN DE ANTIOQUIA



ÁLGEBRA

29

Hallar un número positivo tal que su cuadrado menos el doble de dicho número es 48 y si $a \neq b$ y $a \neq -b$, ¿Cuál es el resultado que se obtiene al simplificar la expresión algebraica $\frac{(a^3+b^3)}{(a^2-b^2)} \frac{(a^2-2ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)}$?

30

Un rectángulo tiene una altura de 3 veces la longitud de la base. Si se incrementan la base en 3 *cm* y la altura en 5 *cm* entonces el área es de 319 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

31

Dividir el polinomio $5x^3-2x+1$ entre $x+1$

32

Factorizar la expresión algebraica $6y^2+11y-21$

33

En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible por 11 y que deja resto 3 al dividirlo por 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?

34

Daniel, Anita y Teo deben entregar impresas las 4.200 tarjetas de navidad que diseñaron en su taller. En la primera semana imprimieron 50 tarjetas diarias y a partir de la segunda semana, aumentaron la impresión en 100 tarjetas por semana. Si empezaron un lunes y no trabajaron los domingos, ¿cuántos días se demoraron en entregar todas las tarjetas?

35

Paola, Teo y Daniel escuchan el número 13 y uno de ellos le suma 1 y dice 14, otro le suma 2 a este número y dice 16 y el último le suma a este número 3 y dice 19, como le toca el turno al primero este suma 1 y dice 20 y así siguen contando. A Teo se le escucha decir 61, a Daniel 40 y a Anita el 602. ¿Cuál de los tres dice 2.006?

36

Hallar las cuatro últimas cifras de $3^{2.004}$

37

En el colegio de Daniel tienen tres tarros de pintura blanca para pintar el salón de clase. Anita vierte $\frac{1}{3}$ del primer tarro en el segundo. En seguida, Felipe vierte $\frac{1}{4}$ del contenido del segundo tarro en el tercero y por último Mateo vierte $\frac{1}{10}$ del tercer tarro en el primero. Al final cada tarro quedó con 9 galones de pintura. ¿Qué cantidad de pintura había inicialmente en cada tarro?

38

Si un número positivo x verifica la relación $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Entonces cual es el valor entero de $x^5+\frac{1}{x^5}$

39

Usando los productos notables, simplificar la expresión $\frac{x^6+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+x+y}$

40

Si p es un número real y las raíces de la ecuación $x^3+2px^2-px+10=0$ están en progresión aritmética, determinar dichas raíces.

41

¿Cuántos números, comprendidos entre 1.000 y 9.999, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es mayor o igual que el producto de los mismos? ¿Para cuántos de ellos se verifica la igualdad?

42

Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

43

Racionalicemos el denominador de la expresión $\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Y además racionalicemos el numerador $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

44

¿Cuál es el resultado de la operación $\log_2 8+\log_3 27+\log_4 64$?

45

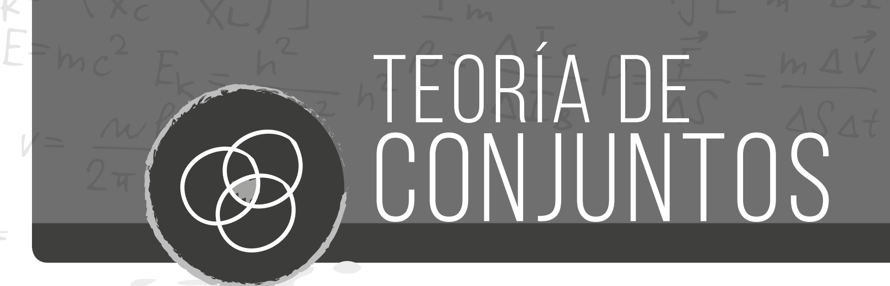
Dado el polinomio $p(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$, probar que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D=C^3$

46

Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$
Sean D y $1\text{-}D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

47

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x-5y=2 & (1) \\ 4x+2y=9 & (2) \end{cases}$



TEORÍA DE CONJUNTOS

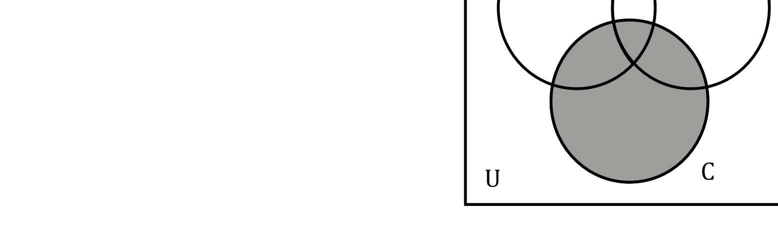


48

Tenemos los conjuntos de números enteros $A=\{1,3,4,8\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{-1,0,2,5\}$, ¿Cuál es el resultado de la operación $A \cap B \cup C$?

49

¿Qué operaciones entre los conjuntos A, B y C representa la región no sombreada de la siguiente gráfica?



50

En un colegio del departamento de Antioquia se hizo una encuesta a 100 estudiantes sobre las preferencias con respecto a las asignaturas de matemáticas y de biología. Al analizar los datos que entrega la encuesta se encuentra que las personas que le gustan las dos asignaturas son el triple de los que les gustan solo las matemáticas, el doble de los que les gusta solo la biología y cuatro veces el número de los que no les gustan estas dos materias. ¿A cuántos estudiantes les agradan las materias de matemáticas?

51

En un municipio de Antioquia al 60% de los jóvenes les gusta el equipo Barcelona, al 50% les gusta el Nacional y al 40% de los que les gusta el Nacional también les gusta el Barcelona. ¿Qué porcentaje de los jóvenes no les gusta ninguno de estos dos equipos?

52

Felipe da a cada uno de los libros de la biblioteca de su colegio una clave de tres letras utilizando el orden alfabético: AAA, AAB, AAC,... AAZ, ABA, ABB, etc. Considerando un alfabeto de 26 letras y que en la biblioteca hay 2203 libros ¿Cuál fue el último código que Felipe utilizó en la colección de libros de la biblioteca?

53

La mitad de los estudiantes que termina el grado 11 en un colegio, han decidido presentarse al examen de admisión de la carrera de Bioingeniería, $\frac{8}{13}$ se presentaran a Sistemas y $\frac{2}{7}$ quieren presentarse a las dos carreras mencionadas. Si el resto de los estudiantes, que son 31, aún no han escogido a qué carrera presentarse, ¿cuál es el número de estudiantes que termina el grado 11?



ESTADÍSTICA
DESCRIPTIVA Y TÉCNICAS DE CONTEO

54

En el colegio de Paola, su profesora de matemáticas hace exámenes que se califican de a puntos. Paola tiene una media de 60 puntos en cuatro exámenes. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Paola en matemáticas en los cinco exámenes?

55

¿Cuál es la probabilidad de que al tirar 2 dados, el resultado sea un número primo?

56

¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas maneras, si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?

57

¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto? ¿Cuántas letras debería tener el alfabeto para que un millón de personas diferentes se pueda identificar con iniciales de dos o tres letras?

58

En el colegio de Daniel la razón del número de mujeres al número de hombres es de 10 a 9. Si la edad promedio (media aritmética) de las mujeres es 16 y la edad promedio de los hombres es 18. ¿Cuál es la edad promedio del colegio?

59

En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

60

En cuántos partidos de un torneo de fútbol con 32 equipos participantes, como en el mundial 2014, se pueden encontrar en las alineaciones iniciales, dos jugadores que hayan nacido el mismo día.

61

En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

62

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces salga al menos una cara?

63

¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, si el último número debe ser cero y un número dígito no se puede repetir al formar cada número?

64

Si con los dígitos 1, 2, 3, 4 formamos números de dos dígitos diferentes y luego seleccionamos al azar uno de estos números, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

65

En la siguiente tabla se muestran las calificaciones de matemáticas de un grupo de 7 estudiantes. ¿Cuál es el valor de la media de estas calificaciones?

Estudiante	Juan	Andrés	Felipe	Santiago	Matías	Jacobo	Lucas
Calificación	4,5	3,5	4,2	4,3	3,8	3,7	4

66

Anita reparte al azar tres invitaciones a su cumpleaños entre tres amigos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las invitaciones llegue a su destino correcto?

67

Anita coloca tres balotas marcadas con los números 1, 2, 3 en una bolsa. Se saca una balota y se anota el número y ella se devuelve a la bolsa. Este proceso se repite otras dos veces. Si todas las balotas tienen la misma posibilidad de ser extraídas cada vez, y si la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado la balota marcada con el número 2 en las tres ocasiones?



MATEMÁTICAS FINANCIERAS

68

Felipe le presta $\$800.000$ a Daniel para organizar su taller y le pone como condición que a los cuatro meses le devuelva la suma de $\$960.000$. En esta transacción ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual que cobra Felipe?

69

Un banco otorga al padre de Anita un préstamo de $\$1.200.000$ a 6 meses y a una tasa de interés simple del 24% anual. ¿Qué interés i mensual paga el papá de Anita y cuál es el valor futuro F?

70

Una cooperativa de ahorro, otorga al propietario de un café internet un préstamo de $\$5.000.000$ durante 8 meses. Si al final de lo pactado, la persona ha pagado $\$6.600.000$, ¿cuánto dinero pagó en intereses y cuál es la tasa de interés simple mensual?

71

Daniel deposita $\$1.000.000$ en una corporación financiera, ella le paga por el depósito, un dinero por el cual le reconoce una tasa de interés del 24% anual con capitalización trimestral. ¿Cuál será el valor ahorrado al final de un año, con interés compuesto y con interés simple?

72

Para dentro de un año, la mamá de Teo necesita $\$1.800.000$ para pagar su matrícula. Si la corporación le ofrece 20% anual con capitalización trimestral. ¿Cuánto deberá depositar hoy para conseguir el valor de la matrícula de Teo?

73

Si un banco presta dinero al 2% mensual ¿En cuánto tiempo duplica su capital?

74

Una entidad financiera ofrece, que por cualquier cantidad de dinero que un ciudadano deposite en sus oficinas, le entregará el doble del depósito al cabo de 36 meses. ¿Cuál es el interés que está pagando?



TRIGONOMETRÍA

75

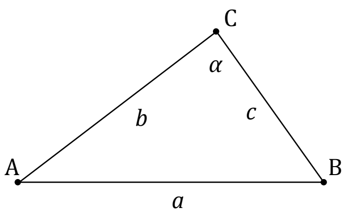
Verifique la identidad: $\cos(t)(\tan(t)+\cot(t))=\csc(t)$

76

Encuentre la solución de la ecuación trigonométrica: $2\cos(t)^2+\cos(t)-1=0$, *para* $0\leq t\leq 2\pi$.

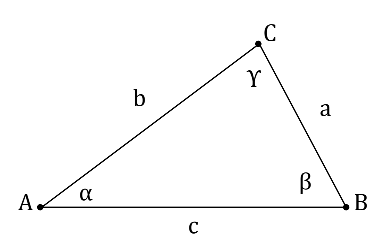
77

¿Si en un triángulo ABC conocemos dos lados *b, c* y su área $A=\frac{4\times b\times c}{5}$ cómo calculamos el tercer lado a ?



78

Determine cuántos triángulos pueden, ver figura, construirse conociendo dos de sus lados y un ángulo con *a = 5, b = 5 y* $\alpha=30°$. Resuelva los triángulos.



79

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos 5x-\cos 7x=0$

80

La ecuación cuadrática $x^2 - ax + b = 0$ tiene como raíces $\tan(\propto)$ y $\tan(\beta)$. Por otro lado, la ecuación cuadrática $x^2 - cx + d = 0$ tiene a $\cot(\propto)$ y a $\cot(\beta)$ como sus dos raíces. ¿Cuál es el valor de $c \times d$?

81

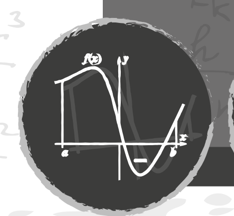
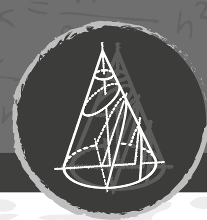
Realizar las operaciones necesarias para mostrar que la expresión

$$\frac{sen x + sen(3x) + sen(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)}$$

Es igual a $\tan(3x)$

82

Exprese $\frac{sen(x)}{2} + \frac{\sqrt{3}\cos(x)}{2}$ en la forma $k\cos(x + \varphi)$


GEOMETRÍA ANALÍTICA E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

83

Exprese en términos de desigualdades los siguientes intervalos y representarlos gráficamente:

a) $[-3,8]$

b) $[5,12]$

c) $(-\infty,2]$

84

Hallar los intervalos que corresponden a las siguientes operaciones:

a) $[5,9]\cup(3,6)$

b) $[5,9]\cap(3,6)$

85

Resuelva las siguientes desigualdades lineales.

a) $6-x\leq 2x+9$

b) $-\frac{1}{2}\leq\frac{4-3x}{5}<\frac{1}{4}$

86

Simplifique las siguientes expresiones, dando la respuesta sólo con exponentes positivos:

a) $\left(4a^4b^3\right)^2\left(5a^2b^5\right)$

b) $\left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2\left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right)$

87

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

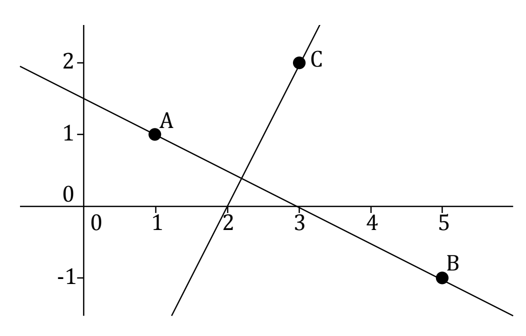
i. $\frac{x^2-x-12}{x^2-9}\times\frac{3+x}{4-x}$

ii. $\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

iii. $\frac{\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\frac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

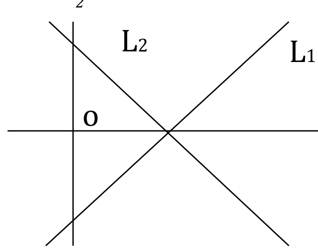
88

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto *C(3,2)* y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos *A(1,1)* y *B(5,-1).*



89

La recta L_1 tiene por ecuación $y=4x-3$ y la recta L_2 es simétrica a la recta L_1 con respecto al eje x. ¿Cuál es la ecuación de la recta L_2?



90

Trazar la gráfica de $f(x)=|x+2|$

91

Encontrar el dominio y el rango de la función f definida por $f(x)=x^2+4$

92

Dadas las funciones f y g definidas por $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2-5$ calcular la función compuesta de f con g, *(gof)(x)* y hallar su dominio y rango.

93

Determinar el dominio y el rango de la función $f(x)=7+\sqrt{3x-6}$

94

Una calculadora tiene dos teclas especiales A y B. La tecla A transforma el número x que esté en la pantalla en $\frac{1}{x}$. La tecla B transforma el número x que esté en la pantalla en $1-x$. Camilo comenzó a pulsar las teclas A, B, A, B,. . . en forma alternada. Luego de realizar 848 pulsaciones, en la pantalla quedó el número 0.8 ¿Qué número estaba inicialmente en la pantalla?

95

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-4,2)$ y radio 2.Grafique esta circunferencia.

96

Muestre que la ecuación $x^2+y^2+\frac{1}{2}x+2y+\frac{1}{16}=0$ representa una circunferencia y determine el centro y el radio de esta circunferencia.

97

Una elipse tiene focos en los puntos $(2,2)$ y $(10,2)$. Suponga que uno de los vértices de la elipse se encuentra en el punto $(0,2)$. Halle la ecuación de la elipse, el otro vértice y trace su gráfica.

98

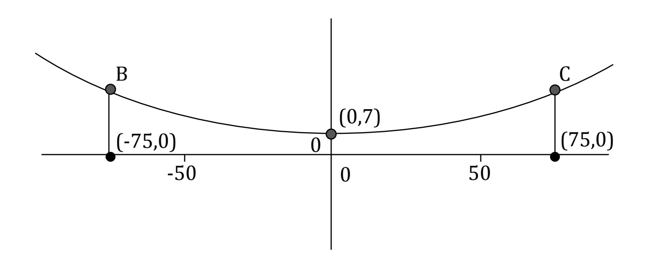
a) Escriba la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(-1,3)$ y cuyo foco está en $(-1,2)$.
b) Escriba la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(3,0)$ y cuyo foco está en $(1,0)$.

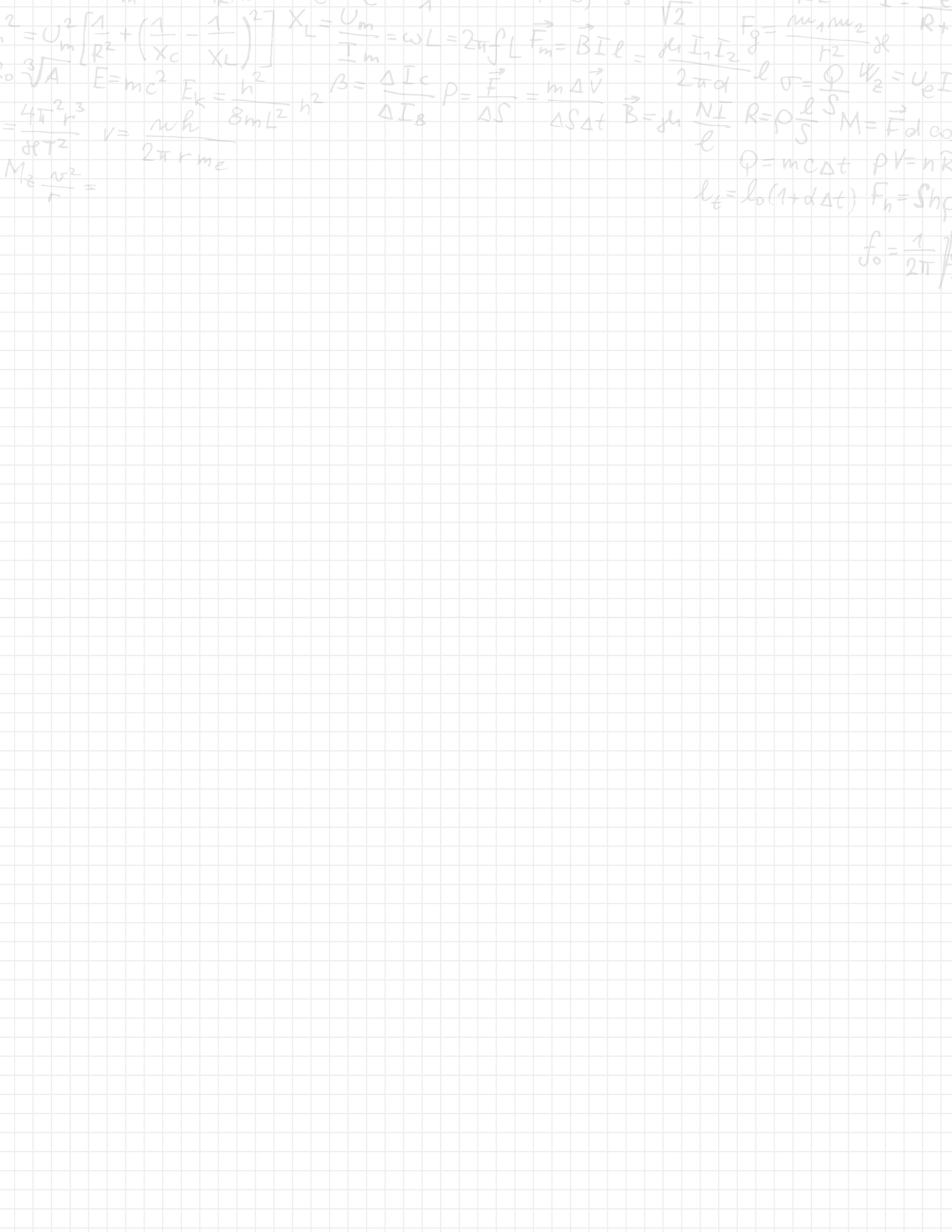
99

Halle la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $(-8,0)$ y $(8,0)$ y que pasa por el punto $(2,0)$.

100

El cable de suspensión de un puente colgante tiene forma de parábola, cuando el peso está uniformemente distribuido horizontalmente. La distancia entre las dos torres es de 150 metros, los puntos de soporte del cable en las dos torres están a 22 metros sobre la carretera y el punto más bajo del cable está a 7 metros por encima de la carretera. Calcule la distancia vertical del cable a un punto sobre carretera, situado a 15 metros del pie de una torre.







SOLUCIONES



ARITMÉTICA

1 SOLUCIÓN

Iniciamos realizando la operación que tenemos dentro del paréntesis:

$= \{31 - [17 \text{ x } (3) - 150 \div 6] + 9 \text{ x } 2\} \div 23$

Luego, destruimos los paréntesis:

$= \{31 - [17 \text{ x } 3 - 150 \div 6] + 9 \text{ x } 2\} \div 23$

Pasamos ahora a efectuar las operaciones que hay dentro de los corchetes, respetando el orden de las mismas:

$= \{31 - [51 - 25] + 9 \text{ x } 2\} \div 23$

$= \{31 - [26] + 9 \text{ x } 2\} \div 23$

Enseguida, eliminamos los corchetes:

$= \{31 - 26 + 9 \text{ x } 2\} \div 23$

Luego resolvemos, una por una, las operaciones que tenemos dentro de las llaves:

$= \{31 - 26 + 18\} \div 23$

$= \{5 + 18\} \div 23$

$= \{23\} \div 23$

Destruimos las llaves y después realizamos la operación que quedó:

$= 23 \div 23$

$= 1$

2 SOLUCIÓN

El mínimo común múltiplo de los denominadores es $\text{mcm}\,(5, 9, 3, 15, 45) = 45.$

Entonces la expresión dada la podemos escribir como:

$$-\frac{19}{5}+\frac{19}{9}-\frac{17}{3}+\frac{23}{15}-\frac{2}{45}=-\frac{19\times 9}{5\times 9}+\frac{19\times 5}{9\times 5}-\frac{17\times 15}{3\times 15}+\frac{23\times 3}{5\times 3}-\frac{2}{45}=$$

$$\frac{-171+95-255+69-2}{45}=\frac{-264}{45}=-\frac{88}{15}$$

3 SOLUCIÓN

El domingo la familia consumió $\frac{1}{2}$ y por tanto les falta por consumir $\frac{1}{2}$ de la pizza. El lunes consumieron $\frac{2}{7}$ de la $\frac{1}{2}$ pizza, es decir consumieron $\frac{4}{14}$ de $\frac{7}{14}$. Entonces lo que falta por consumir de la pizza es:

$$\frac{14}{14}-\frac{7}{14}-\frac{4}{14}=\frac{3}{14}$$

4 SOLUCIÓN

De la figura que nos muestran, podemos deducir que la operación de suma de fraccionarios que nos piden efectuar es: $\frac{4}{10}+\frac{4}{7}-\frac{2}{5}$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es $mcm(10,7,5)=70$. Entonces:

$$\frac{4}{10}+\frac{4}{7}-\frac{2}{5}=\frac{4\times7+4\times10-2\times14}{70}=\frac{28+40-28}{70}=\frac{40}{70}=\frac{4}{7}$$

5 SOLUCIÓN

Primero hallemos el mínimo común múltiplo de 5, 8 ,10 que denotamos con $\mathrm{mcm}\ (5, 8,10)$

Generamos los conjuntos de múltiplos de 5, de 8 y de 10:

$M5 = \{ 0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,\dots \}$

$M8 = \{ 0,8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96,104,\dots \}$

$M10 = \{ 0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,\dots \}$

Después identificamos los números que se repiten en los tres conjuntos o elementos comunes (sin considerar el cero):

Múltiplos comunes = $\{40,80,\dots\}$

Por último, escogemos el menor número del listado anterior, es decir 40. Concluimos así que el mínimo común múltiplo de 5, 8 y 10 es 40, lo cual se expresa como: $mcm(5,8,10)=40$

Ahora calculemos el máximo común divisor de 18, 45, 63 o sea $mcd(18,45,63)=?$

Inicialmente generamos los conjuntos de divisores de 18, de 45 y de 63:

$D18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D45 = \{1, 3, 5, 9, 15,45\}$

$D63 = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

Enseguida identificamos los números que se repiten en los tres conjuntos o elementos comunes:
Divisores comunes $=\{1,3,9\}$. Finalmente, escogemos el mayor número del listado anterior, es decir 9.

Concluimos así que el máximo común divisor de 18, 45 y 63 es 9, lo cual simbólicamente se expresa como: $mcd(18,45,63)=9$

6 SOLUCIÓN

Si $mcd(p,q)=10$ tenemos que $mcd(p,q)=2\times5$ y entonces 2 y 5 son factores comunes de p y q con el menor exponente. De otro lado como $mcm(p,q)=240=2^4\times5\times3$ y estos son los factores comunes y no comunes de p y q con el mayor exponente.

Si dividimos:

$$\frac{mcm(p,q)}{mcd(p,q)}=\frac{2^4\times5\times3}{2\times5}=2^3\times3=24$$

Obtenemos el producto de los factores no comunes de p y q.

Entonces $p=2\times5\times3=30$ y $q=2\times5\times8=80$. También satisfacen la condición $p=80$ y $q=10$

7 SOLUCIÓN

Al obtener algunos términos realizando la división se puede constatar que se obtiene un número periódico, cuyo periodo es 6, $\frac{1}{7}=0,142857142857$...
Entonces como $2000=333\times6+2$, concluimos que el último número que Daniel obtuvo es 4.

8 SOLUCIÓN

Como la fracción simplificada es $\frac{7}{4}$, investiguemos los múltiplos de numerador y denominador y entonces veamos cuáles cumplen la condición:

$$\frac{7}{4}=\frac{14}{8}=\frac{21}{12}=\frac{28}{16}=\frac{35}{20}=\frac{42}{24}=\frac{49}{28}=\frac{56}{32}=\frac{63}{36}=\frac{70}{40}=\frac{77}{44}=\frac{84}{48}$$

Como se puede comprobar, los números que cumplen son cuatro: 21, 42, 63, 84.

9 SOLUCIÓN

Observemos que:

$\frac{1}{13}=0{,}076923076923076923076923076923076923$

Como los racionales son periódicos se observa que los dígitos periódicos son: 076923 y esos 6 dígitos se repiten después de la coma decimal indefinidamente formando en los 100 primeros dígitos $\frac{100}{6}=16{,}6$ grupos. Cuando se está en el grupo 16 tenemos $16x6 = 96$ dígitos y para llegar a 100 nos faltan 4 dígitos

Entonces la suma es $S=16(0+7+6+9+2+3)+0+7+6+9=454$

10 SOLUCIÓN

Sea $A=999!$ y $B=500^{999}$

Veamos cómo es $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B}=\frac{(500-499)}{500}\times\frac{(500-498)}{500}\times\ldots\ldots\frac{(500+498)}{500}\times\frac{(500+499)}{500}$$

$$\frac{A}{B}=\left(1-\left(\frac{499}{500}\right)^2\right)\times\left(1-\left(\frac{498}{500}\right)^2\right)\times\left(1-\left(\frac{497}{500}\right)^2\right)\times\ldots\ldots\ldots\left(1-\left(\frac{2}{500}\right)^2\right)\times\left(1-\left(\frac{1}{500}\right)^2\right)$$

Cada factor de este último producto es <1. Por tanto $\frac{A}{B}<1$ y así $A<B$

11 SOLUCIÓN

Cuando hacemos la suma después de los 9 primeros términos tenemos que, después del décimo factorial $n!$, ellos tienen mínimo dos veces el número dos y dos veces el cinco, lo que produce dos ceros al final, haciendo que estos términos no influyan en las últimas dos cifras de la suma, por eso solo sumamos los primeros nueve factoriales y así obtenemos:

$$1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!=1+2+6+24+120+720+5.040+40.320+362.880=409.113$$

Es decir las dos últimas cifras de la suma $\sum_{n=1}^{n=1645} n!$ son 1 y 3.

12 SOLUCIÓN

Llamemos x a los kilos de panela que produce el trapiche B en ocho horas. Como por cada 5 kilos de panela que produce B, A produce 7 entonces cuando B produce x, A produce $\frac{7x}{5}$. También podemos afirmar que C produce $\frac{2x}{3}$. Ahora bien como A produce 550 kilos más que C, podemos escribir la ecuación $\frac{7x}{5}=\frac{2x}{3}+550$. Esta ecuación es equivalente a $\frac{7x}{5}-\frac{2x}{3}=550$

Y ella es igual a $\frac{11x}{15}=550$. Por lo tanto $x=\frac{15}{11}\times 550=750$

El trapiche B produce 750 kilos, el trapiche A produce $\frac{7\times 750}{5}=1.050$ kilos y el trapiche C produce $\frac{2\times 750}{3}=500$. Resultados que cumplen con las condiciones del problema.

13 SOLUCIÓN

Para el tanque de 2.400 litros de capacidad, empecemos calculando la cantidad de litros de agua que pasan por cada una de las tres tuberías.

Por la tubería que llena el tanque en 10 horas pasan $\frac{240l}{h}$, por la otra pasan $\frac{200l}{h}$ y por el desagüe pasan $\frac{120l}{h}$. En una hora por las tres tuberías pasan $\frac{(240+200-120)l}{h}=320\frac{l}{h}$.

Con esta cantidad podemos calcular el número x de horas que se demora el tanque para llenarse, cuando las tres tuberías están abiertas $x=\frac{2.400}{320}h=7.5\ horas$. Como por el desagüe salen 120 litros por hora en 7.5 horas salen 900 litros.

Verifiquemos: En 7.5 horas entran $240\times 7.5+200\times 7.5=3.300$ y salen 900 litros es decir el tanque se llena.

14 SOLUCIÓN

En primer lugar recordemos que $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{m\times n}$. De acuerdo a esta ecuación podemos, por ejemplo, escribir: $\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times 5}=\frac{5-3}{2\times(3\times 5)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$, $\frac{1}{35}=\frac{1}{5\times 7}=\frac{7-5}{2\times(5\times 7)}$

Entonces la suma de fraccionarios del enunciado la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots+\frac{1}{m\times n}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

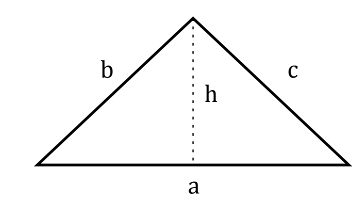
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots+\frac{1}{m\times n}=S$$

Como los divisores de los números fraccionarios son 1×3, 3×5, 5×7, 7×9,......., $m\times n$ tenemos que $n-m=2$ y al sacar el factor común $\frac{1}{2}$, en la sumatoria anterior se cancelan todos los términos, excepto el primero 1 y el último $\frac{1}{n}$. Entonces la suma es $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=S=\frac{23}{47}$

Entonces tenemos que $\frac{n-1}{n}=\frac{2\times 23}{47}$ y así $n=47$ y $m=47-2=45$



15 SOLUCIÓN



El área del triángulo es: $\frac{bc}{2}=\frac{ah}{2}$ y por ello $bc=ah$ (1)
Por ser $p=a+b+c$, se tiene $b+c=p-a$, luego $(b+c)^2=(p-a)^2$, y de aquí, utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2=b^2+c^2$, obtenemos $2bc=p^2-2pa$. Ahora utilizamos la relación (1) y se tiene: $2ah=p^2-2pa$.
Finalmente, podemos calcular a como:

$$a=\frac{p^2}{2(h+p)} \qquad (2)$$

Como ya es conocido a, y teniendo en cuenta las relaciones: $b+c=p-a$ y $bc=ah$, podemos calcular b y c como las soluciones de la ecuación $x^2-(b+c)x+bc=0$

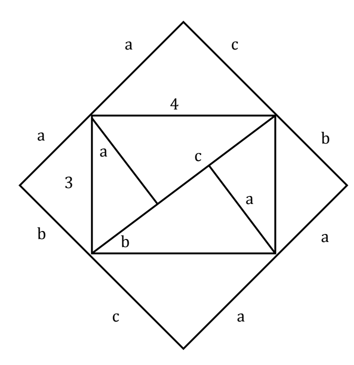
Es decir las soluciones de $x^2-(p-a)x+ah=0$

En nuestro caso $a=\frac{3600}{144}=25$, $b+c=p-a=60-25=35$, $bc=25\times 12=300$

La ecuación es $x^2-35x+300=0$ y sus soluciones son $b=20$ y $c=15$. Luego los lados del triángulo son $a=25$, $b=20$ y $c=15$.

16 SOLUCIÓN

Desdoblamos el rectángulo, reflejando los puntos K y L en los lados y obtenemos un rectángulo de lados $2a$ y $b+c$ como se ilustra en la gráfica siguiente:



y entonces podemos escribir:

$a^2+c^2=4^2$ (1)

$a^2+b^2=3^2$ (2)

$(b+c)^2=4^2+3^2$ (3)

Restando las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$c^2-b^2=16-9=7$ (4)

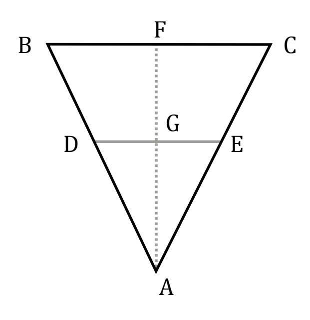
$(b+c)^2=4^2+3^2=16+9=25$ (5)

La ecuación (5) puede escribirse como $(b+c)^2-5^2=0$ y factorizando se tiene $(b+c+5)=0$ y $b+c-5=0$. Descartamos $b+c+5=0$ pues a y c son positivos y entonces tenemos el sistema:

$c^2-b^2=7$ y $b+c=5$ y resolviendo encontramos que $b=\frac{9}{5}$, $c=\frac{16}{5}$ y en la ecuación (2) encontramos $a=\frac{12}{5}$. Con estos valores las dimensiones de la hoja rectangular son $2a=\frac{24}{5}$ y $b+c=\frac{25}{5}=5$.

17 SOLUCIÓN

El tanque, visto de frente, tiene la forma de un triángulo isósceles, con su ángulo vértice en la parte inferior y la base en la parte superior. Tracemos la altura de éste y empleemos la nomenclatura que se muestra en la siguiente figura:



Los datos del problema, con la notación de la figura, son los siguientes: $\overline{BC}=2\text{ m}$, $\overline{AF}=3\text{ m}$, $\overline{AG}=1.8\text{ m}$.

Como los segmentos $\overline{FC}$ y $\overline{GE}$ son paralelos, entonces por el Teorema de Thales tenemos que los triángulos $\Delta\,\text{AFC}$ y $\Delta\,\text{AGE}$ son semejantes. Luego, se cumple que:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{GE}}{\overline{FC}}$$

o equivalentemente que:

$$\overline{GE}=\frac{\overline{FC}\times\overline{AG}}{\overline{AF}}$$

Ahora, como el triángulo $\Delta\,\text{ABC}$ es isósceles y el segmento $\overline{AF}$ es altura, entonces $\overline{AF}$ también es mediatriz y así los segmentos $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$ son congruentes. Por lo tanto,

$$\overline{FC}\cong\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2=1m$$

Reemplazando todos los valores, tenemos:

$$\overline{GE}=\frac{\overline{FC}\times\overline{AG}}{\overline{AF}}=\frac{1\times 1.8}{3}=0.6m$$

Por lo tanto, el radio de la superficie de agua es 0.6 m.

18 SOLUCIÓN

Los triángulos ACD, CBF, ABH y ABC son triángulos equiláteros de igual área porque sus lados son iguales. De otro lado los triángulos DEF, FGH y DHI son triángulos isósceles iguales porque dos de sus lados son los lados del hexágono y los ángulos de la base son de $30°$ grados cada uno. Uno de estos triángulos tiene igual área que uno de los 6 triángulos con vértice común en el centro del hexágono, porque este triángulo equilátero está formado por triángulos iguales a los que forman el triángulo DEF. Por ello y como ellos son tres ellos, tienen una área igual a la mitad del área del hexágono. La otra mitad del área es igual al área de los cuatro triángulos equiláteros ADC, BCF, BAH y ABC. De este modo el área del triángulo equilátero ABC es igual a la mitad del área del hexágono dividida por 4.

Por tanto el área del triángulo ABC es igual a $\frac{98}{4}=24.5\,cm^2$

19 SOLUCIÓN

Como el perímetro es $3a$ y el triángulo es equilátero, su lado es a. Veamos ahora cuál es el valor del perímetro P del hexágono MNPQRS. Para ello tenemos que:

$$P = MN + NP + PQ + QR + RS + MS$$

Por ser los lados paralelos $MN = AM$ y $PQ = PB$ entonces:

$$P = AM + MN + PB + QR + RS + MS$$

Y por otro lado $MS = LS$ y $QR = RT$. Por tanto:

$$P = AM + MN + PB + RT + RS + LS = a + a = 2 \times a$$

El perímetro del hexágono es igual a la longitud de dos lados del triángulo equilátero ABC.

20 SOLUCIÓN

Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90°$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.

El área pedida $S(\alpha)$ se obtiene restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA'M.

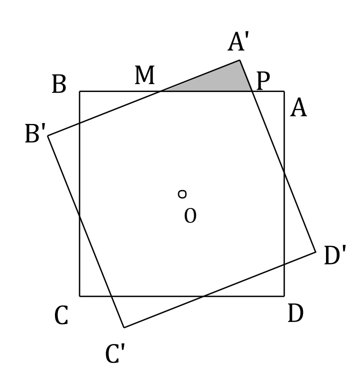
Llamando x al cateto PA' e y al cateto A'M, el área de cuatro triángulos vale $2xy$. Como el lado B'A' vale 1, tenemos: $x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^x}$ (1)

La relación elevada al cuadrado y simplificada queda: $2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ (2)

Pero $x = \sqrt{x^2 + y^2} \times \cos(\alpha)$, $y = \sqrt{x^2 + y^2} \times sen(\alpha)$ y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \times (1 + \cos(\alpha) + sen(\alpha)) = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + sen(\alpha) + \cos(\alpha)}$$



Sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + sen(\alpha) + \cos(\alpha)} = \frac{sen(\alpha) + \cos(\alpha) - 1}{sen(\alpha) + \cos(\alpha) + 1}$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{sen(\alpha) + \cos(\alpha) - 1}{sen(\alpha) + \cos(\alpha) + 1} = \frac{2}{sen(\alpha) + \cos(\alpha) + 1}$$

Con $0 < \alpha < 90°$

21 SOLUCIÓN

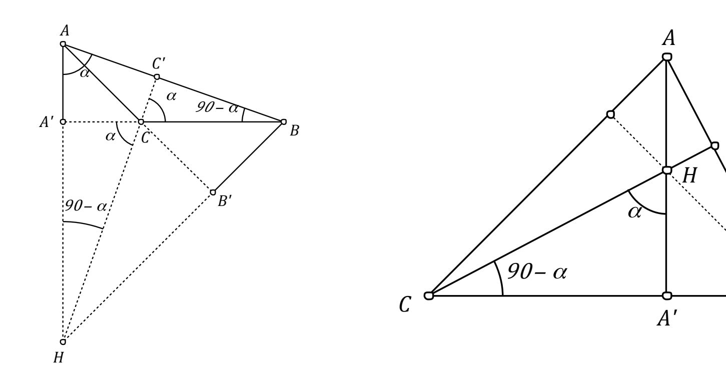
Si el ángulo C <90°.

Llamaremos A' al punto en que la altura de A corta al lado BC del triángulo ABC, y C' al punto donde la altura de C corta al lado AB del triángulo ABC.

El ángulo $\angle CHA'$ es igual al ángulo $\angle AHC'$. En el triángulo $CA'H$, el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HCA'$ es $90° - \alpha$. En el triángulo AHC' el ángulo $\angle HC'A$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HAC'$ es $90° - \alpha$.

El ángulo $\angle HAC'$ es igual al ángulo $\angle A'AB$ del triángulo $A'AB$ que es rectángulo por tanto el ángulo $\angle A'BA$ es α.

De aquí concluimos que los triángulos CHA' y $A'AB$ son semejantes, y como $CH = AB$, son triángulos iguales de donde obtenemos que $AA' = CA'$, por tanto el valor de $tan\ C$=1, y $C = 45°$.



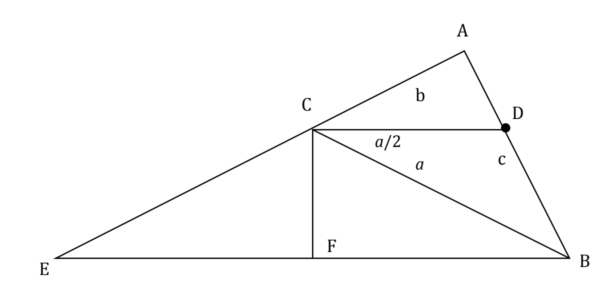
Ángulo C >90°.

Procediendo de modo análogo el ángulo $\angle A'CH$ es igual al ángulo $\angle C'CB$. En el triángulo $C'CB$ el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle A'HC$ es $90° - \alpha$ y en el triángulo $CC'B$ el ángulo $\angle CC'B$ es recto y por tanto $\angle C'BC$ es $90° - \alpha$. El triángulo $AA'B$ es rectángulo en A' y por ello $\angle BAA'$ es α.

Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, entonces la tangente de C vale -1 y $C = 135°$.

Finalmente, si fuese $C = 90°$, C coincide con H y $CH = 0$. Como $AB \neq 0$, este valor de C no es válido.

22 SOLUCIÓN



A partir del vértice B trazamos una paralela a la bisectriz CD y prolongamos el lado AC hasta obtener el punto E.

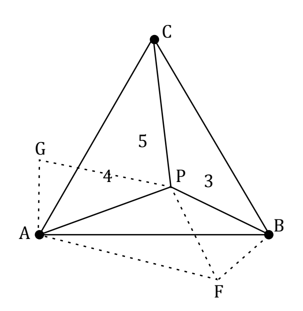
Y, también, CF perpendicular a BE. Así, $CB = CE = a$

Por ángulos alternos-internos, en el triángulo BCF tenemos: $cos\,\frac{c}{2} = \frac{FB}{a} = \frac{EB}{2a}$

Los triángulos ACD y AEB son semejantes: $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EB}$

$$CD = \frac{AC \times EB}{AE} = \frac{2ab \times \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{a+b}$$

23 SOLUCIÓN

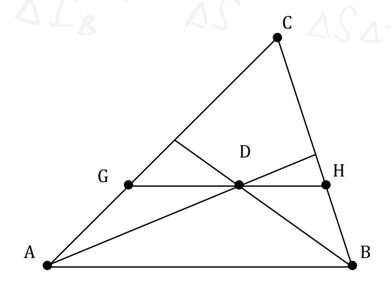


Para encontrar la solución construyamos el triángulo equilátero PBF y tracemos la recta AG que es perpendicular a la prolongación de la recta PB desde el punto A. El ángulo PBC es igual al ángulo ABF, el lado PB igual al lado BF por la construcción y el lado AB es igual a lado BC ya que el triángulo ABC es equilátero, por lo tanto los triángulos PBC y ABF son semejantes. Entonces el segmento AF mide 5 unidades y el ángulo APF es un ángulo recto y por ello el ángulo APG es igual a $180° - 90° - 60° = 30°$.

Y $AG = 4 \times \text{sen}(30°) = 2$ También $PG = 4 \times \cos(30°) = 2\sqrt{3}$

Ahora podemos calcular el lado $AB = \sqrt{2^2 + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2} \cong 6{,}7664$

24 SOLUCIÓN

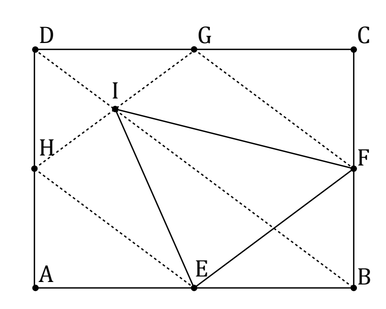


En primer lugar veamos que el triángulo ADG es isósceles. Para ello sabemos que GH es paralela a AB, por lo tanto el ángulo GDA es igual al ángulo DAB ya que son ángulos alternos internos. Pero AD es la bisectriz del ángulo, por lo tanto el ángulo GAD es igual al ángulo GDA. Y por ello el triángulo AGD es isósceles. Por supuesto que para el triángulo HDB se razona de modo análogo.

El perímetro del triángulo CGH P es igual CG+GD+DH+HC, pero como GD=AG ya que el triángulo AGD es isósceles y DH=HB por que el triángulo DHB es isósceles.

Entonces $P = CG + GA + CH + HB = CA + CB = 26 + 19 = 45cm$

25 SOLUCIÓN



Para encontrar la solución tracemos los segmentos auxiliares GF, DB y HE con línea punteadas. Los triángulos DGH, GCF, FBE y EAH son iguales por ser rectángulos y con dos lados iguales. Por lo tanto tienen el área igual y la suma de estas cuatro áreas es la mitad del área del rectángulo ABCD. Entonces el rectángulo HGFE tiene un área igual también a la mitad del rectángulo dado. Este último rectángulo está dividido en dos partes iguales por la diagonal DB y los triángulos HIE y IGF son iguales a los que forman el triángulo IFE. Por lo tanto el área de IFE es la cuarta parte del rectángulo ABCD.

26 SOLUCIÓN

Al enrollar la alfombra y considerando solo la última vuelta su es $L_0 = \pi \times D = \pi$ porque el diámetro es 1 metro. La penúltima vuelta tiene un diámetro de 1-0.02=0.98 y su longitud es $L_1 = \pi \times (1 - 0.02) = \pi \times 0.98$.

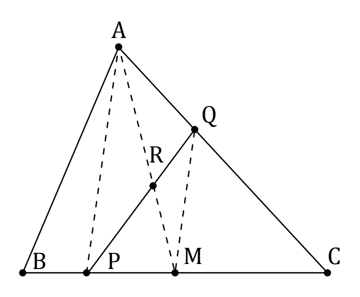
Siguiendo con este proceso podemos decir que $L_n = \pi \times (1 - 0.02 \times n)$, $n = 0,1,2....50$ y la suma de estas longitudes son $\sum_{n=0}^{50} L_n = \pi \times (1 + 0.98 + 0.96 + 0.94 + ... + 0.02 + 0) = 80.11 metros$

27 SOLUCIÓN

El triángulo AGC es semejante al triángulo GHE en la proporción de 1:2, por ello AG=2GH y CG=2GE. Los triángulos AGE y GHE comparten la altura GE trazada desde el vértice E, porque el ángulo AGE es de 90 grados, entonces el área del triángulo AGE es igual al doble del área del triángulo GHE y además el área del triángulo ACG es el doble del área del triángulo AGE. Ellos tienen la misma altura AG y el lado CG es 2GE. Luego el área de ACG más el área de GHE es igual a $\frac{5}{6}$ del área del triángulo ACE. Pero el área del triángulo ACE es $\frac{1}{4}$ del área del paralelogramo ABCD. Es decir, el área de ACG+GHE es $\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{24}$ del área del rectángulo ABCD. Análogamente el área de la región sombreada en el paralelogramo FEBD también es 5/24 del área del paralelogramo, y el área sombreada es $2\times\frac{5}{24}=\frac{5}{12}m^2$ del área ABCD.

28 SOLUCIÓN

En primer lugar tracemos el segmento de recta que une los puntos A y P. Ahora por el punto medio del lado BC tracemos una recta paralela al segmento AP y denomínenos con Q el punto de intersección de la recta MQ con el lado AC y llamemos R la intersección de AM y PQ, ver la figura de abajo. El segmento PQ divide al triángulo ABC en dos regiones, el cuadrilátero ABPQ y el triángulo PQC. Veamos por qué ellas tienen área igual. Para ello probamos que los triángulos ARQ y PRM tienen áreas iguales.



Los triángulos APQ y AMP tienen una base común el segmento AP y una altura igual porque los segmentos AQ y QM son paralelos. Si a los triángulos APQ y AMP, de área igual, le restamos el área común APR obtenemos que los triángulos AQR y PRM son iguales y por tanto las regiones ABPQ y PQC tienen áreas iguales.



ÁLGEBRA

29 SOLUCIÓN

Si denominamos con x el número que vamos a buscar y de acuerdo con el enunciado podemos escribir la siguiente ecuación algebraica $x^2-2x=48$ es decir $x^2-2x-48=0$ y sus raíces son entonces $x_1=-6$ y $x_2=8$. Por lo tanto el número que buscamos es el entero 8.

La expresión dada la podemos simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{(a^3+b^3)}{(a^2-b^2)}\frac{(a^2-2ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a^3+b^3)(a-b)^2}{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a^3+b^3)}=a-b$$

30 SOLUCIÓN

Sea b la longitud de la base. Luego la altura será $3b$. Al incrementar los lados se tiene un área de $(b+3)\times(3b+5)=319$

Efectuando operaciones nos queda $3b^2+14b-304=0$. Resolviendo la ecuación cuadrática para b tenemos:

$$b_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2+3\times4\times304}}{6}=\frac{-14\pm62}{6}$$

Desechamos la solución negativa, por tratarse de una medida de longitud, y por lo tanto la solución es:

$$b=\frac{62-14}{6}=8$$

Luego el rectángulo tiene longitud de la base igual a $8\ cm$ y altura $24\ cm$.

31 SOLUCIÓN

En este caso, $P(x)=5x^3-2x+1$ es el dividendo y $D(x)=x+1$ es el divisor. Para hallar el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ se procede así:

- Se ordenan ambos polinomios con respecto a las potencias de x y si falta alguna potencia se agrega con coeficiente 0. En este caso, sólo falta agregar $0x^2$ al dividendo y la división se indica así:

$$5x^3+0x^2-2x+1 \quad \underline{|x+1}$$

- Para obtener el primer término del cociente, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. En este caso, $\frac{5x^3}{x}=5x^2$ (Éste será el primer término del cociente).

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & \underline{x+1} \\ & 5x^2 \end{array}$$

- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente: $(x+1)5x^2=5x^3+5x^2$ y este resultado se resta del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & \underline{x+1} \\ \underline{-5x^3-5x^2} & 5x^2 \\ -5x^2-2x+1 & \end{array}$$

- Se repite el procedimiento anterior, considerando el polinomio del último renglón, $-5x^2-2x+1$, como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & \underline{x+1} \\ \underline{-5x^3-5x^2} & 5x^2-5x+3 \\ -5x^2-2x+1 & \\ \underline{5x^2+5x} & \\ 3x+1 & \\ \underline{-3x-3} & \\ -2 & \end{array}$$

- El proceso termina cuando el polinomio que se obtiene en el último renglón es de menor grado que el divisor. En este caso, como el divisor es un polinomio de grado 1 y el polinomio del último renglón es de grado 0, el proceso de división terminó y escribimos el resultado así:

$$\frac{5x^3-2x+1}{x+1}=5x^2-5x+3+\frac{-2}{x+1}$$

Donde $Q(x)=5x^2-5x+3$ es el cociente y $R(x)=-2$ es el residuo de la división.
Este resultado también se puede escribir, después de multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por $x+1$, como:

$$5x^3-2x+1=(x+1)(5x^2-5x+3)-2$$

32 SOLUCIÓN

Procedemos a escribir:

$$6y^2+11y-21=\frac{1}{6}\left((6y)^2+11(6y)-126\right)$$

A efecto de factorizar la expresión entre paréntesis debemos hallar dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea -126. Para esto, notemos que la descomposición de 126 en factores primos es $126=2\times3^2\times7$. Por tanteo se obtiene que los números requeridos son 18 y -7. Así,

$$\begin{aligned}6y^2+11y-21&=\frac{1}{6}\left((6y)^2+11(6y)-126\right)\\&=\frac{1}{6}(6y+18)(6y-7)\\&=(y+3)(6y-7)\end{aligned}$$

33 SOLUCIÓN

Vamos a estudiar los siguientes casos:

Caso 1: cuando el primer dígito este mal, es decir $98765432x$ como este número es divisible por 11 se tiene $24+x-20=11$ de donde $x=7$; sin embargo el número 987654327 al dividirse por 9 da como resto 6, luego la tecla 1 no es la que está mal.

Caso 2: cuando el segundo dígito este mal, es decir $9876543x1$ como este número es divisible por 11 se tiene $25-18-x=11$ de donde $x=7$; sin embargo el número 987654371 al dividirse por 9 da como resto 5, luego la tecla 2 no es la que está mal.

Caso 3: cuando el tercer dígito este mal, es decir $987654x21$ como este número es divisible por 11 se tiene $22+x-20=11$ de donde $x=9$; sin embargo el número 987654921 al dividirse por 9 da como resto 6, luego la tecla 3 no es la que está mal.

Caso 4: cuando el cuarto dígito este mal, es decir $98765x321$ como este número es divisible por 11 se tiene $25-16-x=11$ de donde $x=9$; sin embargo el número 987659321 al dividirse por 9 da como resto 5, luego la tecla 4 no es la que está mal.

Caso 5: cuando el quinto dígito este mal, es decir $9876x4321$ como este número es divisible por 11 se tiene $20+x-20=11$ de donde $x=0$; sin embargo el número 987604321 al dividirse por 9 da como resto 4, luego la tecla 5 no es la que está mal.

Caso 6: cuando el sexto dígito este mal, es decir $987x54321$ como este número es divisible por 11 se tiene $25-14-x=11$ de donde $x=0$; sin embargo el número 987054321 al dividirse por 9 da como resto 3, luego la tecla 6 es la que está mal.

34 SOLUCIÓN

De acuerdo al enunciado del problema en la primera semana Daniel, Anita y Teo imprimieron 300 tarjetas en los seis días que trabajan. En las siguientes semanas incrementan las tarjetas impresas en 100. Por ello podemos escribir que el número de tarjetas impresas en $(n-2)$ semanas son:

$$(3+4+5+...+n)(\times 100)=100\times(3+4+5+...+n)=100(1+2+3+4+5+...+n-3)=4200$$

Como la suma de:

$$(1+2+3+.....n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

se tiene que $n(n+1)=90$ y así $n=9$

Entonces Daniel, Anita y Teo imprimieron las 4200 en 7 semanas y se demoran en imprimirlas 42 días y en entregarlas 48 días ya que en las 7 semanas de impresión hay 6 domingos.

35 SOLUCIÓN

Ellos dicen los números de la siguiente manera:

14, 20 ,26,..., luego: 16, 22, 28, ...y por ultimo: 19, 25, 31, ... observemos que los números 14, 20, 26, ... tiene por ley de formación $14+6t$, donde t es un número natural, y como $14+6t=602$ para $t=98$, sigue que Paola es el primera en contar. De la misma forma los números 16, 22, 28,... tienen por ley de formación $16+6t$, donde t es un número natural y como $16+6t=40$ para $t=4$, se sigue que Daniel es el segundo en contar. Análogamente los números 19, 25, 31,... tienen por ley de formación $19+6t$, donde t es un número natural, y como $19+6t=61$ para $t=7$, se sigue que Teo es el tercero en contar. Por otro lado $14+6t=2006$ para $t=332$ de donde se tiene que Paola es la que dice 2.006.

36 SOLUCIÓN

Tenemos que $3^2=9=10-1$. Con esta expresión y la fórmula del binomio de Newton podemos escribir:

$$3^{2004}=(10-1)^{1002}\cong-\left\langle\frac{1002}{3}\right\rangle\times 10^3+\left\langle\frac{1002}{2}\right\rangle\times 10^2-1002\times 10+1$$

(Son los cuatro últimos términos del desarrollo binomial de $(10-1)^{1002}$.)

$$\cong-\frac{1002}{6}\times 1001\times 1000\times 10^3+\frac{1002}{2}\times 1001\times 10^2-1002\times 10+1$$

$$\cong(500+1)(1000+1)\times 10-(1000+2)\times 10+1\equiv(100-20+1)(Mod 10^4)$$

Las últimas cuatro cifras son 0081.

37 SOLUCIÓN

Denominemos con x, y, z los contenidos iniciales de pintura de cada tarro. Después de que Anita hace la operación de vertimiento, en el primer tarro quedan $\frac{2x}{3}$ de pintura y en el segundo $y+\frac{2x}{3}$ Como Felipe saca un cuarto del contenido del segundo tarro, en él queda $\frac{3}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)$

Y lo vertió en el tercero, en este el contenido de pintura es entonces $z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)$. Mateo saca un décimo de esta cantidad y en el tercer tarro finalmente queda $\frac{9}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)\right)$. Y ese décimo del tercer tarro se lo agregó al primer tarro $\frac{2x}{3}+\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)\right)$

En resumen en cada tarro quedaron 9 galones y así podemos escribir

$$\frac{2x}{3}+\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)\right)=9 \quad (1)$$

$$\frac{3}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)=9 \quad (2)$$

$$\frac{9}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{2x}{3}\right)\right)=9 \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1) obtenemos $\frac{2x}{3}+1=9$ y entonces $x=12$. En (2) con este valor de x tenemos $y+8=12$ y $y=4$. Llevamos estos dos valores a (3) y conseguimos $z+3=10$ y $z=7$. Entonces en el primer tarro había 12 galones, en el segundo 4 y en el tercero 7 galones.

38 SOLUCIÓN

Se tiene:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2= x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9$ y así tenemos que $x+\frac{1}{x}=3$

Entonces:

$$3\times 9=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3= x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 3$$

Y entonces:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

Por lo tanto:

$$7\times 18=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\times\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{5}=x^5+\frac{1}{x^5}+3=126$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=126-3=123$$

39 SOLUCIÓN

La expresión dada la podemos escribir, usando el producto notable $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + y^3$ Como:

$$\frac{x^6 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^2 + x + y} = \frac{(x^2)^3 + (x+y)^3}{x^2 + (x+y)}$$

Ahora usamos el cociente notable:

$$\frac{(x+y)^3}{(x+y)} = x^2 - xy + y^2$$

y entonces escribimos:

$$\frac{(x^2)^3 + (x+y)^3}{x^2 + (x+y)} = (x^2)^2 - x^2(x+y) + (x+y)^2 = x^4 - x^3 - x^2y + x^2 + 2xy + y^2$$

40 SOLUCIÓN

Sean a, $\frac{a+c}{2}$, c dichas raíces.

Así pues,

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = (x-a)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)(x-c)$$

De donde, identificando coeficientes llegamos a:

$(a+c)\times\frac{3}{2} = -2p$ (1)

$\frac{(a+c)^2}{2} + ac = -p$ (2)

$(a+c)\times\frac{ac}{2} = -10$ (3)

De (1) y (3) sigue $\frac{ac}{3} = \frac{5}{p}$ y como $a+c = -\frac{4p}{3}$, llevando estos valores de $a+c$ y ac a (2) podemos concluir que:

$$16p^3 + 18p^2 + 270 = 0 \text{ es decir, } 8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$$

Una raíz real de este polinomio es $p = -3$ y como:

$$8p^3 + 9p^2 + 135 = (p+3)(8p^2 - 15p + 45)$$

Sigue que $p = -3$ es la única raíz real de dicho polinomio. Esto nos lleva a $ac = -5$, $a+c=4$ de donde a y c son 5 y -1 y las raíces que nos piden son -1, 2 y 5.

41 SOLUCIÓN

Si el número tuviera algún cero entre sus cifras, entonces tendríamos la desigualdad estricta. Hay exactamente $9000-9^4=2439$ números de este tipo, esto es, con una cifra igual a cero. Consideremos el número "abcd" escrito en su expresión decimal, y supondremos que no contiene ninguna cifra cero. Entonces la desigualdad:

$$a+b+c+d \geq a\times b\times c\times d$$

es equivalente (dividiendo por) $a\times b\times c\times d$ a

$$\frac{1}{b\times c\times d}+\frac{1}{a\times c\times d}+\frac{1}{a\times b\times d}+\frac{1}{a\times b\times c} \geq 1 \qquad (1)$$

Por lo tanto si tres o cuatro de estos dígitos fueran unos, entonces uno de los cuatro anteriores sumandos sería 1 y se obtendría la desigualdad estricta. Hay exactamente $4\times 8+1=33$ números de este tipo.

Por otra parte, demostremos que una condición necesaria para que se verifique la desigualdad es que al menos el número debe tener dos unos entre sus cifras.

Efectivamente, supongamos por contradicción, y sin pérdida de generalidad que $b,c,d \geq 2$ Entonces:

$$b\times c\times d \geq 8; a\times c\times d \geq 4; a\times b\times d \geq 4; a\times b\times c \geq 4$$

y así, por (1), tenemos:

$$1 \leq \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$$

Lo cual es una contradicción.

Resta, por lo tanto, considerar el caso en que el número tiene exactamente dos cifras iguales a uno. Supongamos por ejemplo, que $a=b=1$ y $c,d>1$. En este caso, la desigualdad en cuestión se traduce en:

$$\frac{2}{c\times d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq 1 \quad (2)$$

Demostremos en primer lugar que, al menos, una de las cifras c o d, debe ser un dos. Efectivamente, si por el contrario $c,d \geq 3$, entonces:

$$c\times d \geq 9; c \geq 3; d \geq 3$$

y así, por (2), tenemos: $1 \leq \frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$ lo cual es una contradicción.

Supongamos, por lo tanto que $c=2$. Se obtiene entonces que:

$$\frac{2}{d}+\frac{1}{2} \geq 1$$

lo cual es equivalente a decir que $d \leq 4$.

Resumiendo:
Si d=4, entonces se obtiene la igualdad inicial (las cifras son 1, 1, 2, 4; y existen 12 números de este tipo).
Si d=3, entonces se obtiene la desigualdad estricta inicial (las cifras son 1, 1, 2, 3; y existen 12 números de este tipo).
Si d=2, entonces se obtiene la desigualdad estricta inicial (las cifras son 1, 1, 2, 2; y existen 6 números de este tipo).
Por lo tanto, y a modo de resumen global, la desigualdad se da en 2.439 + 33+12+12+6=2.502 números y la igualdad en 12 de ellos.

42 SOLUCIÓN

Sea n un número que verifica el enunciado y s la suma de sus cifras.

Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n=s^3$, resulta que $11 \leq s \leq 21$ (1)

Si $n=x\,y\,z\,t$, tenemos:
$1000x + 100y + 10z + t = s^3$ (2)

$x + y + z + t = s$ Restando nos queda:
$999x + 99y + 9z + t = s^3 - s$ (3)

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y como:

$$s^3 - s = (s-1)s(s+1)$$

Y de acuerdo con (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9
:$16 \cdot 17 \cdot 18$; $17 \cdot 18 \cdot 19$; $18 \cdot 19 \cdot 20$ sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º Caso

$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$

2º Caso

$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5832$

3º Caso

$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son 4.913 y 5.832

43 SOLUCIÓN

Racionalicemos el denominador de la expresión:

$$\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{2(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=\frac{2(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

Y además racionalicemos el numerador:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}=\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

$$=\frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

44 SOLUCIÓN

El logaritmo $\log_b a$ de un número a en base b, se define como el exponente d al cual hay que elevar la base b para obtener el número a, es decir $b^d=a$. Entonces $\log_2 8=3$, porque $2^3=8$, así mismo $\log_3 27=3$, ya que $3^3=27$ y $\log_4 64=3$.

Por tanto: $\log_2 8+\log_3 27+\log_4 64=9$

45 SOLUCIÓN

Llamemos r, s, y t las tres raíces del polinomio. El polinomio entonces lo podemos escribir como: $p(x)=(x-r)(x-s)(x-t)$. Haciendo las operaciones tenemos:

$$p(x)=x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst$$

Y si igualamos coeficientes, obtenemos las conocidas relaciones de Cardano-Vieta:

$$r+s+t=-B$$

$$rs+st+tr=C$$

$rst=-D$ y como $r^2=st$ por la hipótesis del problema, estas relaciones pueden escribirse de la siguiente forma:

$$C=rs+r^2+tr=r(s+r+t)=-rB$$

$$-D=rst=r^3$$

Finalmente, elevando al cubo esta primera expresión conseguimos lo pedido:

$$C^3=(-rB)^3=B^3D$$

46 SOLUCIÓN

Por las fórmulas que relacionan las raíces y los coeficientes de la ecuación, se tiene:

$$D+1+D=-p$$

$$D(1-D)=q$$

De la primera se obtiene inmediatamente $p=-1$; de la segunda, $q=D-D^2$

Pero:

$$D=p^2-4q=1-4q=1-4\left(D-D^2\right)$$

Es decir $4D^2-5D+1=0$

Y por ello $D=1$ o $D=\frac{1}{4}$. Si $D=1$, entonces $q=1-1^2=0$

Si, $D=\frac{1}{4}$ entonces $q=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$ Los valores obtenidos son:

$$(p,q)=(-1,0)$$

$$(p,q)=\left(-1,\frac{3}{16}\right)$$

47 SOLUCIÓN

$$\begin{cases}3x-5y=2 & (1)\\ 4x+2y=9 & (2)\end{cases}$$

De la ecuación (1) despejamos la variable x:

$$x=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}y \quad (3)$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación (2):

$$4\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}y\right)+2y=9$$

Resolvemos esta ecuación en la variable y:

$\frac{8}{3}+\frac{20}{3}y+2y=9$, es decir $\frac{26}{3}y=9-\frac{8}{3}$ ó $\frac{26}{3}y=\frac{19}{3}$, de donde $y=\frac{19}{26}$.

Reemplazamos el valor de y en la ecuación (3) para obtener el respectivo valor de x:

$$x=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\left(\frac{19}{26}\right)=\frac{52+95}{78}=\frac{147}{78}$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $x=\frac{147}{78}$, $y=\frac{19}{26}$ o el par ordenado $\left(\frac{147}{78},\frac{19}{26}\right)$



TEORÍA DE CONJUNTOS

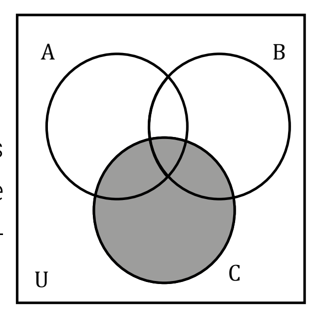
48 SOLUCIÓN

Primero se realizará la operación A interceptado B ($A \cap B$), para esta operación se toman los números que se repiten en ambos conjunto. Entonces $A \cap B$={3,4}.

Para completar la operación A interceptado B unido C ($A \cap B \cup C$), se adicionan a la intercepción $A \cap B$={3,4} los números del conjunto C quedando como respuesta

$$A \cap B \cup C=\{-1,0,2,3,4,5\}.$$

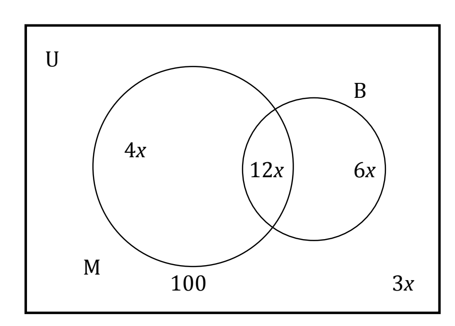
49 SOLUCIÓN



En el conjunto Universal U de la figura se encuentran los conjuntos A, B y C, la zona no sombreada hace referencia a los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B, pero no pertenecen al conjunto C, es decir $(A \cup B) - C$

50 SOLUCIÓN

Sean M el conjunto de los estudiantes que les gusta las Matemáticas y B el conjunto de los que les gusta la Biología. Para realizar y facilitar la solución del problema consideremos el mínimo común múltiplo de los números 3, 2 y 4. Sabemos que mcm(3,2,4)=12. Entonces denominemos con $12x$ el número de estudiantes que les gusta simultáneamente las Matemáticas y la Biología es decir el número de elementos que tiene el conjunto $M \cap B$. Por lo tanto, de acuerdo con el enunciado, el número de los estudiantes que les gusta solo las Matemáticas es $4x$, el número de los que les gusta solo la biología es $6x$ y el número de los que no le gustan ni las Matemáticas ni la Biología es $3x$. En un gráfico de Venn organizamos esta información



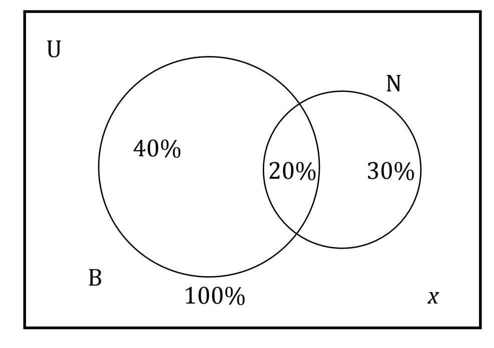
De acuerdo a lo anterior podemos escribir $4x+12x+6x+3x=100$ y así $25x=100$ y $x=4$

De este modo, el número de estudiantes a los que les gustan las Matemáticas es $4x+12x=64$.

51 SOLUCIÓN

Denominamos con B el conjunto de jóvenes aficionados al Barcelona y con N los hinchas del Nacional y ahora se calcula cual es el porcentaje de los jóvenes que son aficionados a los dos equipos, es decir el número de jóvenes que pertenecen a $B \cap N$.

Para ello, calculamos el 40% del porcentaje de jóvenes aficionados al Nacional que es el 50% de todos los jóvenes o sea $\frac{40}{100}\times 50\% = 20\%$. Con este dato, entonces realizar el siguiente Diagrama de Venn:



De este modo, siendo x los jóvenes que no son hinchas de ninguno de los dos equipos, tenemos $40\%+20\%+30\%+x=100$ y así $x=10\%$. Entonces el porcentaje de jóvenes que no les gusta ni el Barcelona ni el Nacional es el 10%.

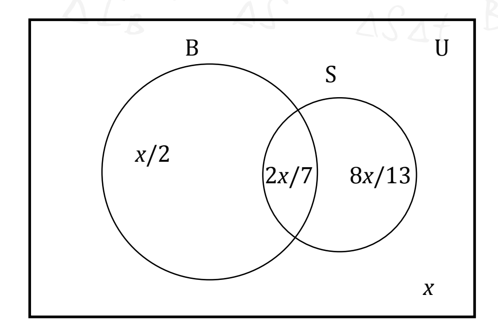
52 SOLUCIÓN

De la A a la Z, en orden, hay 26 letras, así que de AAA a AAZ hay 26 códigos (AAZ es el número 26).
De la misma manera, de AAA a AZZ hay $26\times 26=676$ códigos.
Podemos ver que $2203=676\times 3+175$, así que aún nos faltan 175 códigos después de CZZ, que es el código $3\times 26\times 26=2028$.
Como $175=6\times 26+19$, después de DFZ (que es el código $626+26\times 6$) nos faltan aún 19 códigos, así que la etiqueta es DGS.

53 SOLUCIÓN

Llamemos x al número total de estudiantes de grado 11, sea B el conjunto de estudiantes que se van a presentar a Bioingeniería y ellos son $\frac{x}{2}$, S el conjunto de los que se presentan a Sistemas y ellos son $\frac{8x}{13}$. La intersección de B con S, $B \cap S$ tiene $\frac{2x}{7}$ estudiantes. Entonces los estudiantes que solo aspiran a Bioingeniería son $\frac{x}{2}-\frac{2x}{7}$ y los estudiantes que solo se van a presentar a Sistemas son $\frac{8x}{13}-\frac{2x}{7}$.

Veamos el diagrama de Venn correspondiente a esta información:



Con ella podemos entonces escribir la siguiente ecuación $\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{7}\right)+\frac{2x}{7}+\left(\frac{8x}{13}-\frac{2x}{7}\right)+31=x$

Simplificando y realizando la operación con los fraccionarios tenemos:

$$\frac{(91+112-52)x}{182}+31=x$$

Y por último $31=x\left(\frac{182}{182}-\frac{151}{182}\right)$ y por tanto $x=182$. Este es el número total de estudiantes de grado 11.



54 SOLUCIÓN

Si denominamos con E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, los 5 exámenes de matemáticas que presentó Paola.
De acuerdo al enunciado tenemos:

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4} = 60$$

Como en el quinto examen sacó 80 puntos entonces E_S=80. Con este dato podemos calcular:

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5}{5}$$

Veamos como:

$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 4 \times 60 = 240$ y entonces $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 240 + 80 = 320$

Por lo tanto la media de las notas de Paola en los cinco exámenes es:

$$\frac{320}{4} = 64$$

55 SOLUCIÓN

Por cada dado se tiene la posibilidad de sacar 6 números, al tirar dos dados hay 36 resultados posibles, que resulta de la multiplicación de las 6 opciones de cada dado.

La suma de los números formados por los dos dados está comprendida entre el 2 y el 12 el conjunto de los resultados de dicha suma es $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ y los números primos de este conjunto son = $\{2,3,5,7,11\}$

Al conocer el número de resultados posibles y el número de primos del conjunto de resultados de cada lanzamiento, encontramos la probabilidad de que al tirar 2 dados, el resultado sea un número primo.

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

56 SOLUCIÓN

Empecemos y contestemos la segunda pregunta porque es más sencilla. El presidente podemos elegirlo primero de 20 formas distintas. Una vez elegido el presidente quedan 19 personas para elegir el vicepresidente y por último, quedan 18 personas para elegir al secretario. En total, hay $20\times19\times18=6.840$ posibilidades. Esto se llama variaciones sin repetición de 20 elementos tomados de 3 en 3.

(Se llaman variaciones sin repetición porque se supone que una persona no puede ocupar dos cargos).

Para responder a la primera pregunta:

Tengamos en cuenta que cada posibilidad PVS de presidente vicepresidente y secretario elegida anteriormente, prescindiendo de los cargos, da lugar a seis posibilidades que la primera pregunta considera iguales: PVS, PSV, VPS, VSP, SPV y SVP. Por tanto resultan sólo $6840/6=1140$ formas de elegir tres personas para un comité.

57 SOLUCIÓN

Si partimos de que el alfabeto tiene 27 letras, con dos letras podemos hacer 27^2 iniciales y con 3 letras podemos hacer 27^3 iniciales. Así que con dos o tres iniciales podemos hacer $27^2+27^3=20.412$ iniciales.

En un alfabeto con n letras tendremos $n^3+n^2=n^2\times(n+1)$ iniciales, número que debe ser mayor o igual que $1.000.000$. Para $n=100$ se supera claramente esta cifra. Para $n=99$ tenemos $99^2\times100=980.100$, así que n debe ser $n\geq100$.

58 SOLUCIÓN

Sea m el número de mujeres y h el número de hombres. El enunciado nos dice que $m=11\times k$ y que $h=9\times k$, para algún entero k. Además $16\times m$ es la suma de las edades de las mujeres y $18\times h$ es la suma de las edades de los hombres. Entonces el promedio de la edad en el colegio es:

$$\frac{16\times m+18\times h}{m+h}=\frac{16\times(11\times k)+18\times(9\times k)}{11\times k+9\times k}=\frac{16\times11+18\times9}{11+9}=\frac{338}{20}=16\frac{18}{20}$$

59 SOLUCIÓN

Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis. Veamos ahora las siguientes operaciones:

$200=2\times100+1$, entonces al menos hay 101 personas del mismo sexo.

$101=5\times20+1$, y hay al menos 21 personas de la misma edad y sexo.

$21=4\times5+1$ y por tanto al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

60 SOLUCIÓN

En un torneo, como el mundial 2014, se jugarán 64 partidos. En la primera ronda se juegan 48 partidos: 6 partidos en cada uno de los 8 grupos. En los octavos de final se juegan 8, en cuartos 4, en semifinales 2 y en las finales se juegan los últimos 2 partidos.
La probabilidad de que dos jugadores no cumplan años el mismo día es:

$$\frac{364}{365}=0{,}997$$

Si los dos primeros jugadores no cumplen años el mismo día, existen 363 días en los cuales, un tercer jugador puede cumplir años sin coincidir con los otros dos. Esto es, la probabilidad de ninguno de tres jugadores cumpla años el mismo día es:

$$\frac{363\times 364}{365\times 365}=0{,}992$$

Para 22 jugadores, la probabilidad de que ninguno de ellos cumpla años el mismo día es:

$$\frac{344\times 345\times 346\times .....\times 362\times 363\times 364}{365\times 365\times 365\times .....\times 365\times 365\times 365}=0{,}524$$

Ahora podemos calcular la probabilidad de que algún jugador cumpla años el mismo día que otro. Ella es igual a: $1-0{,}524=0{,}476$
Y como se juegan 64 partidos, el $0{,}476$ de 64 partidos es igual a $30{,}5$. Entonces en aproximadamente 30 partidos, encontraremos en las alineaciones iniciales, dos jugadores que nacieron el mismo día.

61 SOLUCIÓN

Hay $\binom{11}{6}=\frac{11!}{5!\times 6!}$ elecciones posibles de los jugadores.(Recuerde que $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$)

La suma de los números de las camisetas de los elegidos será impar si hay entre ellos una cantidad impar de números impares. En las camisetas hay 6 números impares y 5 pares. Escribamos ahora los casos en los cuales la suma de las camisetas sea impar:

Una camiseta impar y 5 pares: $\binom{6}{1}\times\binom{5}{5}=6\times 1$
Tres camisetas impares y 3 pares: $\binom{6}{3}\times\binom{5}{35}=20\times 10$
Cinco camisetas impares y 1 par: $\binom{6}{5}\times\binom{5}{1}=6\times 5$
Así pues, la probabilidad pedida será:

$$\frac{6+200+30}{\binom{11}{6}}=\frac{236}{462}=\frac{118}{231}\approx 0{,}51$$

62 SOLUCIÓN

Si lanzamos una moneda dos veces, el número de caras C y sellos S posibles son 4, a saber CC, CS, SC y SS y de estos eventos hay 3 en donde al menos se presenta una cara. Por ello la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces salga al menos una cara es $\frac{3}{4}$.

63 SOLUCIÓN

Si en la posición de las unidades colocamos el cero en la posición de las decenas podemos colocar uno de los tres números $1, 2, 3$ o sea tres posibilidades. Colocado este, en la posición de las centenas solo tenemos 2 posibilidades porque ya solo nos quedan dos números. Por lo tanto podemos formar 6 números de tres cifras con el último digito el cero y los dígitos de las decenas y centenas diferentes.

64 SOLUCIÓN

Con los dígitos $1, 2, 3, 4$ podemos formar 12 números diferentes porque para la posición de las decenas podemos escoger como dígito, uno cualquiera de los 4 números dados y colocado el dígito de las decenas nos quedan 3 dígitos para las unidades ya que los números son diferentes. Con ello formamos los doce siguientes números: $12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43$. Y entre ellos hay 6 números impares $13, 21, 23, 31, 41, 43$. Por lo tanto la probabilidad de sacar un número impar es $\frac{6}{12}=0.5$.

65 SOLUCIÓN

La media aritmética también conocida como la media o el promedio, se obtiene a partir de la suma de todos los datos de un mismo conjunto dividida entre el número de sumandos.
La suma de las calificaciones es $S=4,5+3,5+4,2+3,8+4,3+3,7+4=28$ y la media $\overline{X}$ de las calificaciones es $\overline{X}=\frac{s}{n}=\frac{28}{7}$.

66 SOLUCIÓN

Sean A, B y C los amigos de Anita. Ella puede repartir las invitaciones de la siguiente manera: $123, 132, 213, 231, 312, 321$, donde usamos la notación anterior para indicar que al primer destinatario se le ha entregado la invitación del destinatario A, al segundo la del destinatario B y al tercero la del destinatario C. Observando estas seis maneras de repartir, el número de invitaciones que llegan al destinatario correcto son respectivamente $3, 1, 1, 0, 0, 1$. Vemos que en 4 de los seis casos posibles hay al menos una invitación que llega a su destino correcto. Por tanto, la probabilidad de que al menos una de las invitaciones llegue al destino correcto es $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

67 SOLUCIÓN

Con los números $1, 2$ y 3 se puede obtener una suma de 6, mediante las siguientes 7 ternas ordenadas e igualmente probables. Ellas son: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$. La balota marcada con el número 2 está en la terna $(2, 2, 2)$ una vez entre las siete posibles.

Por ello la probabilidad de que se haya sacado la balota marcada con el número 2 en las tres ocasiones es $p = \frac{1}{7}$.



68 SOLUCIÓN

Miremos con detalle los elementos que están presentes en el préstamo de Felipe a Daniel. En primer lugar Felipe ganó \$160.000 por prestarle a Daniel \$800.000. En esta transacción: \$800.000 es el capital invertido y se llama capital presente que representamos con la letra P; \$160.000 representa el interés devengado por el préstamo, se denota con la letra I; \$960.000 representa el valor en que se transforman los \$800.000 durante los tres meses; el valor inicial más los intereses, se denominará valor futuro y se representa con la letra F. Por lo tanto, valor futuro es el valor en que se convierte un capital inicial prestado a una tasa de interés fijada y en tiempo determinado y así $F=P+I$. En el interés simple, los intereses no producen intereses.

En efecto, $I=F-P=960.000-800.000=160.000$.

Estos intereses corresponden a un periodo de 4 meses el cual se representa con letra n:

$$i=\left(\frac{I}{n}\right)\times\frac{100}{P}$$

Así, el porcentaje o el interés i simple devengado en un mes es:

$$i=\frac{40.000\times 100}{800.000}=5\%$$

69 SOLUCIÓN

Los elementos presentes en la transacción bancaria son:

El capital presente en el préstamo bancario es $P=\$1.200.000$. El interés anual es de $i=24\%$ anual = 2% mensual =0,02. El periodo del préstamo es 6 meses.

El interés devengado por el préstamo I lo podemos calcular como:

$I=P\times i\times n=1.200.000\times 0.02\times 6=144.000$. Entonces el papá de Anita paga mensualmente 2% de interés que equivalen a \$24.000 y el capital futuro:

$$F=P+P\times i\times n=P\times(1+i\times n)=1.200.000\times(1+0.02\times 6)$$

$$F=1.200.000\times 1.12=1.344.000$$

70 SOLUCIÓN

En esta operación crediticia el capital presente P es $\$5.000.000$ y como ha pagado $6.600.000$, este es el capital futuro y entonces $I=F-P=6.600.000-5.000.000=1.600.000$.
Estos son los intereses pagados durante 8 meses.
La tasa de interés simple mensual la podemos calcular del siguiente modo:
Como $F=P+P\times i\times n$ podemos despejar i de esta expresión

$$i=\frac{F-P}{P\times n}=\frac{1.600.000\times 100}{5.000.000\times 8}=4\%$$

El porcentaje del interés simple mensual pagado el propietario del café internet es del 4% mensual y pagó $\$200.000$ mensuales en intereses.

71 SOLUCIÓN

Para poder resolver el problema planteado repasemos el concepto de interés compuesto y de capitalización. En una transacción se presenta el interés compuesto, cuando los intereses simples se suman periódicamente al capital inicial.

A este proceso se le llama capitalización y el tiempo que dura la operación se denomina período de capitalización. El interés compuesto, es importante debido que la mayoría de las corporaciones financieras lo usan y él da el rendimiento efectivo de cualquier inversión.

El capital futuro, cuando se trabaja con el interés compuesto, viene dado por la expresión:

$$F=P\times(1+i)^n$$

De donde P es el capital presente, i el interés del periodo y n los periodos de capitalización y además el capital presente es $P=F\times(1+i)^{-n}$.

En nuestro caso tenemos que $P=1.000.000$, el interés trimestral es $i=\frac{24\%}{4}=6\%$ y el número de periodos, 4 trimestres en un año, es $n=4$

Por lo tanto $F=1.000.000\times(1+0,06)^4\approx 1.000.000\times 1,26247696\approx 1.262.477$.

Con interés simple $F=1.000.000\times(1+0,06\times 4)=1.240.000$.
En el primer trimestre el capital con intereses es $1.000.000\times(1,06)=1.060.000$. En el segundo trimestre es $1.060.000\times 1,06=1.123.600$, en el tercer trimestre es $1.123.600\times 1,06=1.191.016$ y en el último, el capital con intereses es $1.191.016\times 1.06=1.262.477$
Los intereses al final del año son: Con interés compuesto 262.477 y con interés simple 240.000

72 SOLUCIÓN

El capital que necesita la mamá de Teo es 1.800.00 pesos y debemos conocer cuál valor presente produce ese capital, usando el interés compuesto. Entonces el interés es 5%.Y el número de periodos es $n=4$, cuatro trimestres en un año. Con estos datos podemos calcular el valor presente P.

$$P = F \times (1+i)^{-4} = \frac{F}{(1+i)^4} = \frac{1.800.000}{(1,05)^4}$$

Y así $P \approx \frac{1.800.000}{1.2155} = 1.480.864,45$

La mamá de Teo debe depositar 1.480.864,45 hoy para dentro de un año tener un capital de 1.800.000 pesos.

73 SOLUCIÓN

En este caso $F=2P$, el capital futuro es dos veces el capital presente, el periodo es un mes entonces con esos datos y la expresión para el interés compuesto podemos calcular el valor de n.

Como $\frac{F}{P}=(1+i)^n$ y entonces $2=(1+0,02)^n$
Por tanto:

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1,02)} \approx \frac{0,3010299956}{0,0086001717} \approx 35 \text{meses}$$

En cambio un usurero que presta al 10% duplica su capital en:

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1,1)} \approx \frac{0,3010299956}{0,0413926851} \approx 7,3 \text{meses}$$

74 SOLUCIÓN

Los datos que nos entrega el enunciado son: P capital presente o inicial, $F=2 \times P$ $n=36$ meses meses y nos piden averiguar el interés compuesto mensual i. De la expresión:

$$F = P \times (1+i)^n$$

Podemos despejar:

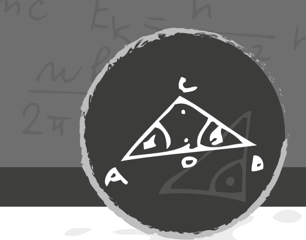
$$\left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = i$$

Entonces:

$$i = (2)^{\frac{1}{36}} - 1 \approx 0,0194$$

Es decir, el porcentaje de interés que la entidad está pagando es 1,94% mensual.

TRIGONOMETRÍA



75 SOLUCIÓN

Una buena idea es reemplazar las funciones trigonométricas en términos de las funciones seno y coseno. También es buena idea efectuar los productos indicados y simplificar al máximo las fracciones. En este caso, para iniciar, seleccionamos el lado izquierdo de la igualdad por ser más elaborado y contener más operaciones para realizar. Así,

$$\cos(t)\left(\tan(t)+\cot(t)\right)=\csc(t)$$

$$\cos(t)\left(\tan(t)+\cot(t)\right)$$

$$=\cos(t)\left(\frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}+\frac{\cos(t)}{sen(t)}\right)$$

$$\text{sen}(t)+\frac{\cos(t)^2}{\text{sen}(t)}=$$

$$\frac{\text{sen}(t)^2+\cos(t)^2}{\text{sen}(t)}=\frac{1}{\text{sen}(t)}=\csc(t)$$

Con este procedimiento hemos verificado la identidad:

$$\cos(t)\left(\tan(t)+\cot(t)\right)=\csc(t)$$

76 SOLUCIÓN

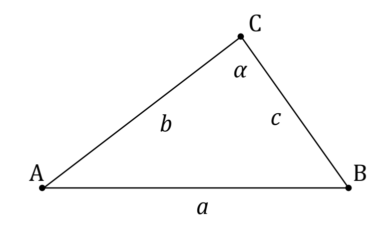
Observe que ésta es una ecuación cuadrática en $\cos(t)$. Entonces:

$\cos(t)=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}$ Entonces $\cos(t)=-1$ o $\cos(t)=\frac{1}{2}$

Si $\cos(t)=-1$, el valor de t en el intervalo $0\le t<2\pi$ es $t=\pi$ y para $\cos(t)=\frac{1}{2}$, los valores en el intervalo $0\le t<2\pi$ son $t=\frac{\pi}{3}$ o $t=\frac{5\pi}{3}$

Fácilmente se verifica que todos los valores obtenidos de t son soluciones de la ecuación.

77 SOLUCIÓN



Podemos usar para calcular el lado a la ley del coseno que podemos escribir de la siguiente manera:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\alpha)$$

Por hipótesis sabemos que el área del triángulo ABC es $A = \frac{4 \times b \times c}{5}$ y además el área de un triángulo también se puede calcular con la expresión $A = \frac{b \times c \times \text{sen}(\alpha)}{2}$. Entonces de estas dos expresiones para el área del triángulo, podemos deducir que $\text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$.

Con este valor podemos determinar que $\cos(\alpha) = \pm\frac{3}{5}$ y reemplazando en la primera expresión tenemos:

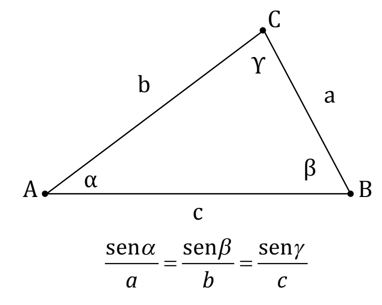
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 \pm \frac{6 \times b \times c}{5}}$$

Y esta es la expresión para el lado del triángulo.

---

78 SOLUCIÓN

De acuerdo con la ley del seno tenemos para un triángulo ABC de lados a, b y c y con ángulos opuestos α, β, γ se tiene la ley del seno:



$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c}$$

De acuerdo con los datos podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{\text{sen}(30°)}{5} = \frac{\text{sen}(\beta)}{5}$$

Por tanto:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{5 \times \text{sen}(30°)}{5} = \frac{5}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las soluciones de la ecuación $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}$ están en el primer y segundo cuadrante, las podemos llamar β_1 y $\beta_2 \cdot \beta_1 = 30°$ y $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 150°$. Indaguemos si β_2 es apropiado, como $\alpha + \beta_2 = 180°$, se concluye que el tercer ángulo γ debe ser $0°$ y entonces con el ángulo β_2 no se forma un triángulo. Con $\alpha = 30°$ y $\beta_1 = 30°$, concluimos que el tercer ángulo $\gamma = 180° - 30° - 30° = 120°$. Ahora calculamos el tercer lado c con la expresión:

$$\frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c}$$

y así:

$$\frac{\text{sen}30°}{5}=\frac{\text{sen}120°}{c}$$

Y entonces:

$$c=5\times\frac{\text{sen}(120°)}{\text{sen}(30°)}=5\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=5\times\sqrt{3}$$

En conclusión hay un solo triángulo que satisface las condiciones dadas.

79 SOLUCIÓN

$cos\,(6x-x)-cos\,(6x+x)=0$

$cos\,6x\,cos\,x+sen\,6x\,sen\,x-cos\,6x\,cos\,x+sen\,6x\,sen\,x=0$

$$2\,sen\,6x\,sen\;\,x=0$$

$$sen\,6x=0 \text{ o } sen\;\,x=0$$

$$6x=k\pi \text{ o } x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Entonces:

$x=\frac{k\pi}{6}$ o $x=k\pi,\;\; k\in\mathbb{Z}$ son las soluciones de la ecuación original.

80 SOLUCIÓN

A partir de la relación existente entre los coeficientes de la ecuación cuadrática y sus raíces podemos escribir las siguientes relaciones:

$a=\tan(\propto)+\tan(\beta)$ y $b=\tan(\propto)\times\tan(\beta)$

$c=\cot(\propto)+\cot(\beta)$ y $d=\cot(\propto)\times\cot(\beta)$

De acuerdo a estas relaciones podemos escribir:

$$c=\frac{1}{\tan(\propto)}+\frac{1}{\tan(\beta)}=\frac{\tan(\propto)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)\times\tan(\beta)}=\frac{a}{b}$$

También tenemos que:

$$d=\cot(\propto)\times\cot(\beta)=\frac{1}{\tan(\propto)\times\tan(\beta)}=\frac{1}{b}$$

De este modo:

$$c\times d=\frac{a}{b^2}$$

81 SOLUCIÓN

Usando las identidades trigonométricas básicas de adición y sustracción podemos escribir:

$$\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(5x)}{\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)}=\frac{\operatorname{sen}(3x-2x)+\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(3x+2x)}{\cos(3x-2x)+\cos(3x)+\cos(3x+2x)}$$

Esta expresión es idéntica:

$$\frac{2\operatorname{sen}(3x)\cos(2x)+\operatorname{sen}(3x)}{2\cos(3x)\cos(2x)+\cos(3x)}$$

Sacando el factor común $sen(3x)$ en el numerador y $cos(3x)$ en el denominador obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\times(2\cos(2x)+1)}{\cos(3x)\times(2\cos(2x)+1)}$$

Simplificando en el numerador y denominador obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}=\tan(3x)$$

82 SOLUCIÓN

Consideremos que las expresiones de la forma $Asen(x) + B\cos x$ siempre pueden escribirse en la forma $k\ sen\ (x+\varphi)$ o $k\cos(x+\varphi)$ con $k>0.$

$k\cos(x+\varphi) = k\,[\cos x\cos\varphi - sen\ x\ sen\ \varphi]$

$= k\cos x\cos\varphi - k\ sen\ x\ sen\ \varphi$

$= (-k\ sen\ \varphi)\ sen\ x + (k\cos\varphi)\cos x.$

Para que se cumpla la igualdad es necesario que:

$(-k\ sen\ \varphi)=\frac{1}{2}$ y que $k\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Elevando cuadrado ambas expresiones:

$(-k\ sen\ \varphi)^2=\frac{1}{4}$ y $(k\cos\varphi)^2=\frac{3}{4}$

$(-k\ sen\ \varphi)^2+(k\cos\varphi)^2=k^2=1$ o sea $k=1$

De esta forma y conociendo el valor de k:

Tenemos que $sen(\varphi)=-\frac{1}{2}$ y como $k\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ deducimos que $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

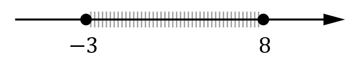
Como $sen(\varphi)<0$ y $\cos(\varphi)>0$ concluimos que φ está en el IV cuadrante. Por lo tanto:

$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

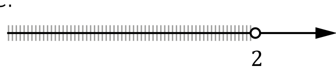
Así $\frac{sen(x)}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos(x)}{2}=k\cos(x+\varphi)=1\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

83 SOLUCIÓN

a) $[-3,8]=\{x/-3\leq x\leq 8\}$. Gráficamente podemos representar esta desigualdad en la recta real como un intervalo con los extremos incluidos:



b) $(5,12]=\{x/5<x\leq 12\}$ Gráficamente:



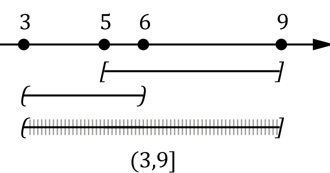
c) $(-\infty,2)=\{x/x<2\}$ Gráficamente:

2

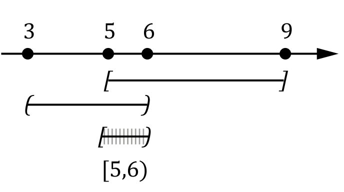
Como los intervalos son conjuntos, podemos realizar entre ellos las operaciones unión, intersección y demás operaciones entre conjuntos.

84 SOLUCIÓN

a) $[5,9]\cup(3,6)=(3,9]$. Ya que $\{x/5\leq x\leq 9\}\cup\{x/3<x<6\}=\{x/3<x\leq 9\}$ y este intervalo lo podemos representar gráficamente como sigue:



b) $[5,9]\cap(3,6)=[5,6)$ ya que $\{x/5\leq x\leq 9\}\cap\{x/3<x<6\}=\{x/5\leq x<6\}$
Gráficamente:



85 SOLUCIÓN

a) Empleando propiedades de orden de los números reales:

$$6-x\leq 2x+9$$

$$6-x+x\leq 2x+9+x$$

$$6\leq 3x+9$$

$$6-9\leq 3x+9-9$$

$$-3\leq 3x$$

$$\frac{1}{3}(-3)\leq\left(\frac{1}{3}\right)(3x)$$

$$-1\leq x$$

Luego, el conjunto solución es $\{x: x\geq -1\}$ es decir, el intervalo $[-1,\infty)$.

b) Empleando propiedades de orden de los números reales:

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{4-3x}{5}<\frac{1}{4}$$

$$5\times\left(-\frac{1}{2}\right)\leq 5\times\left(\frac{4-3x}{5}\right)<5\times\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{5}{2}\leq 4-3x<\frac{5}{4}$$

$$-\frac{5}{2}-4\leq 4-3x-4<\frac{5}{4}-4$$

$$-\frac{13}{2}\leq -3x<-\frac{11}{4}$$

$$\frac{1}{-3}\times\left(-\frac{13}{2}\right)\geq\frac{1}{-3}\cdot(-3x)>\frac{1}{-3}\times\left(-\frac{11}{4}\right)$$

$$\frac{13}{6}\geq x>\frac{11}{12}$$

Es decir:

$$\frac{11}{12}<x\leq\frac{13}{6}$$

Luego, el conjunto solución es el intervalo:

$$\left(\frac{11}{12},\frac{13}{6}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{11}{12}<x\leq\frac{13}{6}\right\}$$

86 SOLUCIÓN

a) Procedemos haciendo uso de las propiedades de los exponentes:

$$\begin{aligned}(4a^4b^3)^2(5a^2b^5) &= \left(4^2(a^4)^2(b^3)^2\right)(5a^2b^5)\\ &= (16a^8b^6)(5a^2b^5)\\ &= (16)(5)a^8a^2b^6b^5\\ &= 80a^{10}b^{11}\end{aligned}$$

b) Procedemos haciendo uso de las propiedades de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2\left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right) &= \frac{3^2x^2y^4x^2z^2}{4\cdot 3x^{-2}y^2z^4}\\ &= \frac{3^2 3^{-1}}{4}x^4x^2y^4y^{-2}z^2z^{-4}\\ &= \frac{3}{4}x^6y^2z^{-2}\\ &= \frac{3x^6y^2}{4z^2}\end{aligned}$$

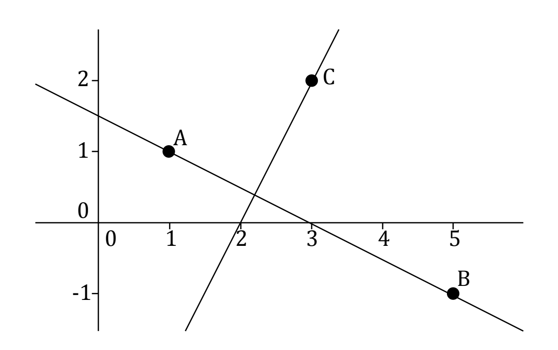
87 SOLUCIÓN

i. $$\frac{x^2-x-12}{x^2-9}\times\frac{3+x}{4-x}=\frac{(x-4)(x+5)}{(x-3)(x+3)}\times\frac{x+3}{-(x-4)}=\frac{(x-4)(x+3)(x+3)}{-(x-3)(x+3)(x-4)}=-\frac{x+3}{x-3}$$

ii. $$\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}=\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\times\frac{y^2+5y-6}{2y^2+y-3}=\frac{(2y-3)(2y+3)}{(2y-3)(y+6)}\times\frac{(y+6)(y-1)}{(2y+3)(y-1)}=1$$

iii. $$\frac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}=\frac{(2x^2-3x-2)(x^2+x-2)}{(x^2-1)(2x^2+5x+2)}=\frac{(2x+1)(x-2)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x+1)(x+2)}=\frac{x-2}{x+1}$$

88 SOLUCIÓN



Sean L_1 la recta que queremos hallar y L_2 la recta que pasa por los puntos A y B. Denotemos por m_1 y b_1 la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta L_1, respetivamente; es decir, la ecuación de L_1 es $y = m_1\, x + b_1$. Así mismo denotemos por m_2 la pendiente de la recta L_2. Empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1,1)$ y $(x_2, y_2) = (5,-1)$ podemos calcular m_2:

$$m_2 = \frac{-1-1}{5-1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como L_1 es perpendicular a L_2 tenemos que $m_1 \times m_2 = -1$ y por tanto $m_1 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Así la ecuación de L_1 es $y = 2\,x + b_1$. El valor del intercepto b_1 se obtiene al reemplazar el punto $C(3,2)$ en la ecuación de la recta, es decir, $2 = 2(3) + b_1$. Por lo tanto $b_1 = -4$, así la ecuación de la recta L_1 es $y = 2\,x - 4$.

89 SOLUCIÓN

La simetría con respecto al eje x significa que para cualquier punto (x, y) del plano cartesiano su simétrico con respecto al eje x es el punto $(x, -y)$. Sabiendo que la recta L_2 es simétrica a L_1, con respecto del eje x, tenemos que el simétrico del intercepto de la recta L_1 con respecto al eje y, el punto $(0, -3)$, es entonces $(0, 3)$ y este punto es entonces el intercepto de L_2. El intercepto de L_1 con respecto al eje x es el punto $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y su simétrico con respecto a x es el mismo $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

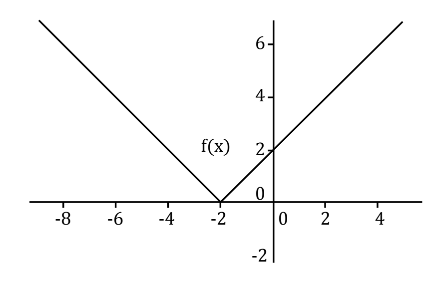
Como dos puntos definen una recta, con ellos encontramos la ecuación de L_2 como $y = -4x + 3$

90 SOLUCIÓN

Por la definición de valor absoluto sabemos que $f(x) = |x+2| = x+2$ cuando $x+2 \geq 0$ es decir si $x \geq -2$.

Cuando $x+2 < 0$, esto es si $x < -2$, $f(x) = |x+2| = -(x+2) = -x-2$.
En otros términos esta función es equivalente a la función definida por secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ x-2, & x < -2 \end{cases}$$



91 SOLUCIÓN

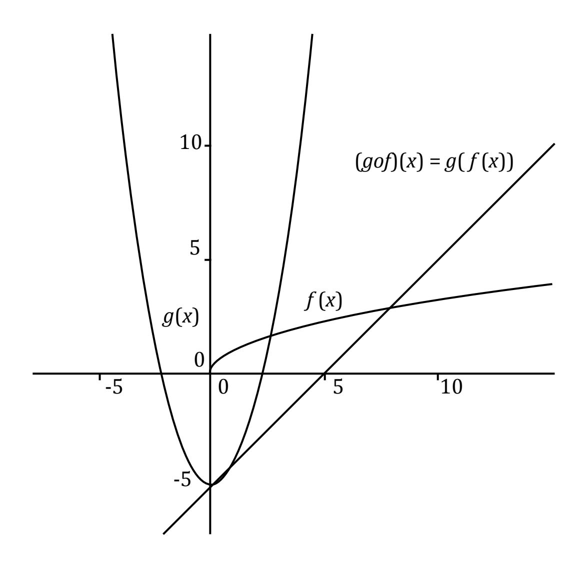
El dominio de f son todos los reales $(-\infty,+\infty)$ puesto que x^2+4 es un número real para todo número real x. Puesto que $x^2 \geq 0$, para todo x, entonces $x^2+4 \geq 4$, de lo anterior deducimos que $f(x) \geq 4$. Por lo tanto, cualquier número ≥ 4 es la imagen de al menos una x del dominio. Por ejemplo, para encontrar una x tal que $f(x)=7$, resolvemos la ecuación $7= x^2+4$ para x y obtenemos $x = \pm 3$. En general, para cualquier $k \geq 4$, al hacer $f(x) = k$, obtenemos $k = x^2+4$ y eso nos da las soluciones $x=\pm\sqrt{k-4}$. Esto prueba que el rango de la función es el conjunto de todos los números ≥ 4. Es decir el intervalo $[4,+\infty)$.

92 SOLUCIÓN

Acorde con la definición de la función compuesta de dos funciones, tenemos que:

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 -5 = x -5$. Aunque la función $x -5$ está definida para todos los números reales, el dominio de gof no es el conjunto de los números reales. Veamos porque: El dominio de la función g es el conjunto de todos los números reales y su rango el intervalo $[-5,+\infty)$, pero la función $f(x) = \sqrt{x}$ sólo está definida para los números $x \geq 0$ y su rango es igual. Así que el dominio de gof es el conjunto de los números reales positivos, es decir, el intervalo $(0,+\infty)$.

Observa la representación de los dominios de las funciones f, g y gof en la gráfica de las tres funciones:



93 SOLUCIÓN

El radicando $\sqrt{3x-6}$ debe ser positivo. Al resolver $3x-6 \geq 0$ se obtiene $x \geq 2$, por lo cual el dominio de f es $[2,+\infty)$

Ahora, por definición $\sqrt{3x-6} \geq 0$ para $x \geq 2$, y en consecuencia, $y = 7 + \sqrt{3x-6} \geq 7$. Puesto que $3x-6$ y $\sqrt{3x-6}$ crecen cuando $x \geq 2$, se concluye que el rango de f es $[7,+\infty)$.

94 SOLUCIÓN

Supongamos que tenemos en la pantalla de la calculadora el número x. Camilo al pulsar A obtiene $\frac{1}{x}$. Si a continuación pulsa B obtiene $\frac{x-1}{x}$. Si luego pulsa A nuevamente, obtiene $\frac{x}{x-1}$. Después pulsa nuevamente B y en pantalla aparece $\frac{1}{1-x}$. Luego de pulsar A otra vez resulta $1-x$, y si a continuación se pulsa B se obtiene x. Es decir que la secuencia de seis pulsaciones ABABAB deja en la pantalla el mismo número inicial. Ahora bien, $848 = 6\times 141+2$ o lo que es lo mismo $648 \equiv 2\ mod\ (6)$, es decir que al pulsar ABAB. . . hasta completar 848 pulsaciones es lo mismo que pulsar AB. Si el número que estaba inicialmente en la pantalla era x, al pulsar A y luego B, resulta $1-\frac{1}{x}$. Por lo tanto $1-\frac{1}{x}=0.8$ y así $\frac{1}{x}=0.2$ y por último $x=5$.

95 SOLUCIÓN

En general, tenemos que la ecuación de la circunferencia de centro (h,k) y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En este caso, $h = -4$, $k = 2$ y $r = 2$ y entonces la ecuación de la circunferencia es:

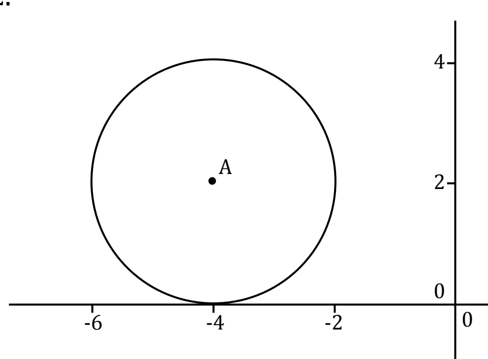
$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 2^2 = 4$$

Si realizamos las operaciones indicadas en esta ecuación tenemos que:

$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4$, y simplificando:

$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$

Luego, la ecuación $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$ también representa la circunferencia de centro en el punto A (-4,2) y radio 2.



96 SOLUCIÓN

Debemos expresar la ecuación dada en la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}x+2y+\frac{1}{16}=0$$

$$x^2+\frac{1}{2}x+y^2+2y=-\frac{1}{16}$$

En donde podemos completar dos trinomios cuadrados perfectos, es decir:

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\left(y^2+2y+1\right)=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+1$$

Para obtener:

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$$

Luego, la ecuación representa una circunferencia de centro en $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ y radio 1.

97 SOLUCIÓN

Como los focos están ubicados en $(2,2)$ y $(10,2)$ entones el eje focal de la elipse es la recta y=2 y tenemos una elipse horizontal.

Observe que la distancia entre los focos es 8 unidades y por lo tanto $2c=8$, es decir $c=4$ y el centro de la elipse se ubica a 4 unidades de cada foco y por lo tanto el centro de la elipse debe ser el punto $(6,2)$, es decir que $(h,k)=(6,2)$.

Al ubicar en este punto el origen del sistema de coordenadas $x'y'$, obtenemos las ecuaciones que relacionan los dos sistemas de coordenadas, estas son $x'=x$ - 6 y $y'=y-2$.

Con este par de ecuaciones podemos obtener las coordenadas de los focos y el vértice dado en el sistema de coordenadas $x'y'$:

Focos $(2-6,2$ - $2)=(-4,0)$ y $(10-6,2-2)=(4,0)$.
Vértices $(0-6,2-2)=(-6,0)$.

Luego el otro vértice se encuentra en el punto $(6,0)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$ y en el sistema de coordenadas xy en el punto $(6+6,0+2)=(12,2)$

En la figura se muestra la ubicación del sistema de coordenadas $x'y'$, los focos y los vértices. Según sus coordenadas en el sistema $x'y'$ podemos concluir que $c=4$ y $a=6$. Por lo tanto $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$ y entonces la ecuación de la elipse, en el sistema de coordenadas $x'y'$, es:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x')^2}{36}+\frac{(y')^2}{20}=1$$

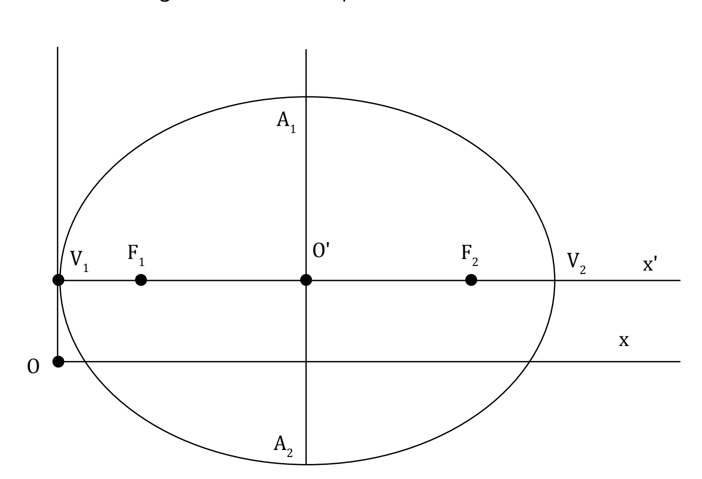
y en el sistema de coordenadas xy, es:

$$\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

Los principales elementos de la elipse en el sistema de coordenadas $x'y'$ son los siguientes:

Centro $C=(0{,}0)$.
Focos $F_1=(-4{,}0)$ y $F_2=(4{,}0)$.
Vértices $V_1=(-6{,}0)$ y $V_2=(6{,}0)$.
Extremos del eje menor $A_1=(0,\sqrt{20})$ y $A_2=(0,-\sqrt{20})$.

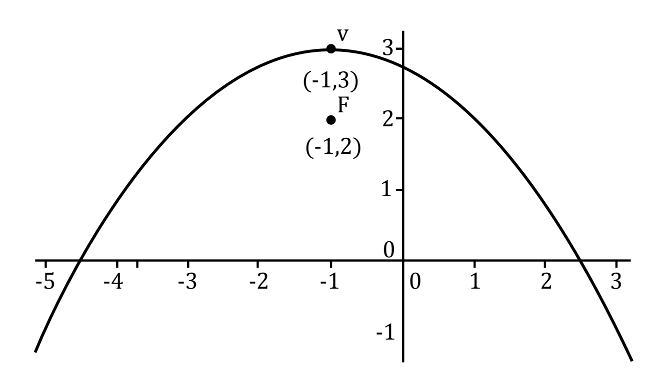
A continuación, se muestra la gráfica de la elipse.



98 SOLUCIÓN

a) En este caso, $h=-1$, $k=3$ y $p=-1$ (p se despeja de la igualdad $(h,p+k)=(-1,2)$). Por tanto, la ecuación requerida es $y-3=\frac{1}{4(-1)}(x+1)^2$, que se puede escribir también como $4y+x^2+2x-11=0$.

b) En este caso, $h=3$, $k=0$ y $p=-2$ (p se despeja de la igualdad $(h+p,k)=(1,0)$). Por tanto, la ecuación requerida es $x-3=\frac{1}{4(-2)}y^2$, que se puede escribir también como $8x+y^2+24=0$. A continuación tenemos la gráfica del punto a):



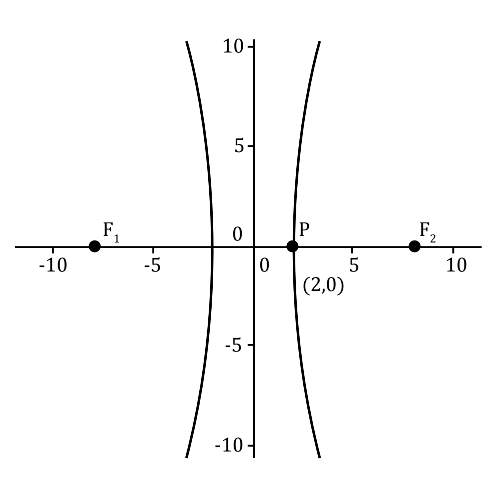
99 SOLUCIÓN

Como los focos de la hipérbola se encuentran en los puntos (-8,0) y (8,0) entonces identificamos $c=8$. Ahora, como el punto (2,0) pertenece a la gráfica de la hipérbola y la ecuación de este tipo de hipérbolas es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

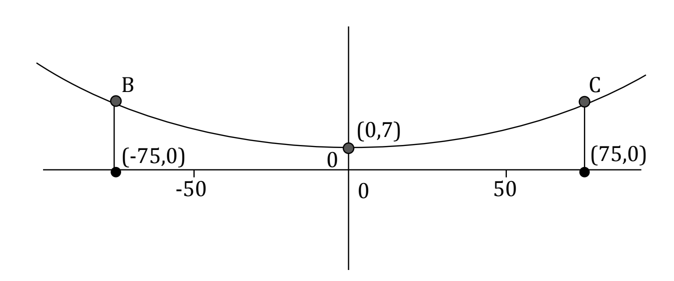
Entonces se debe cumplir que $\frac{2^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$ y así $a^2=4$, como $a>0$ entonces $a=2$

$b^2=c^2-a^2=8^2-2^2=60$. Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{60}=1$



100 SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta la información suministrada podemos suponer que la parábola que describe el puente tiene su vértice sobre el eje Y de un plano cartesiano como muestra la gráfica:



De acuerdo con la gráfica, la parábola que describe el puente corresponde a una parábola con vértice en el punto $(0,7)$ que se abre hacia arriba.

Por lo tanto su ecuación es: $y-7=k\,x^2$ donde k es una constante que se puede determinar conociendo que cuando $x = 75$ ó $x = -75$ se tiene que $y = 22$. Es decir, $22 - 7 = k\,(75)^2$ de donde $k=\frac{15}{75^2}=\frac{1}{375}$.

Así que la ecuación de la parábola es:

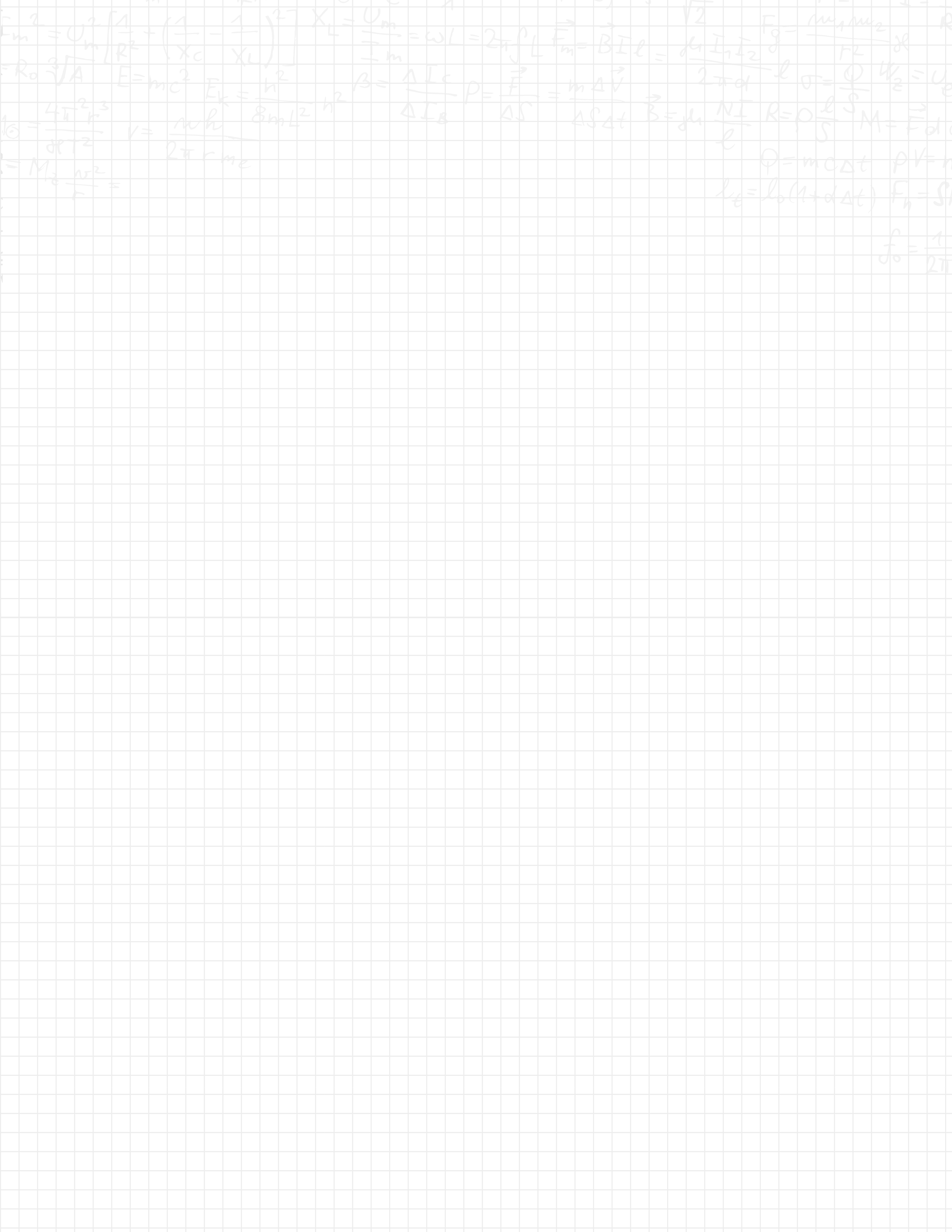
$$y=7+\frac{x^2}{375}$$

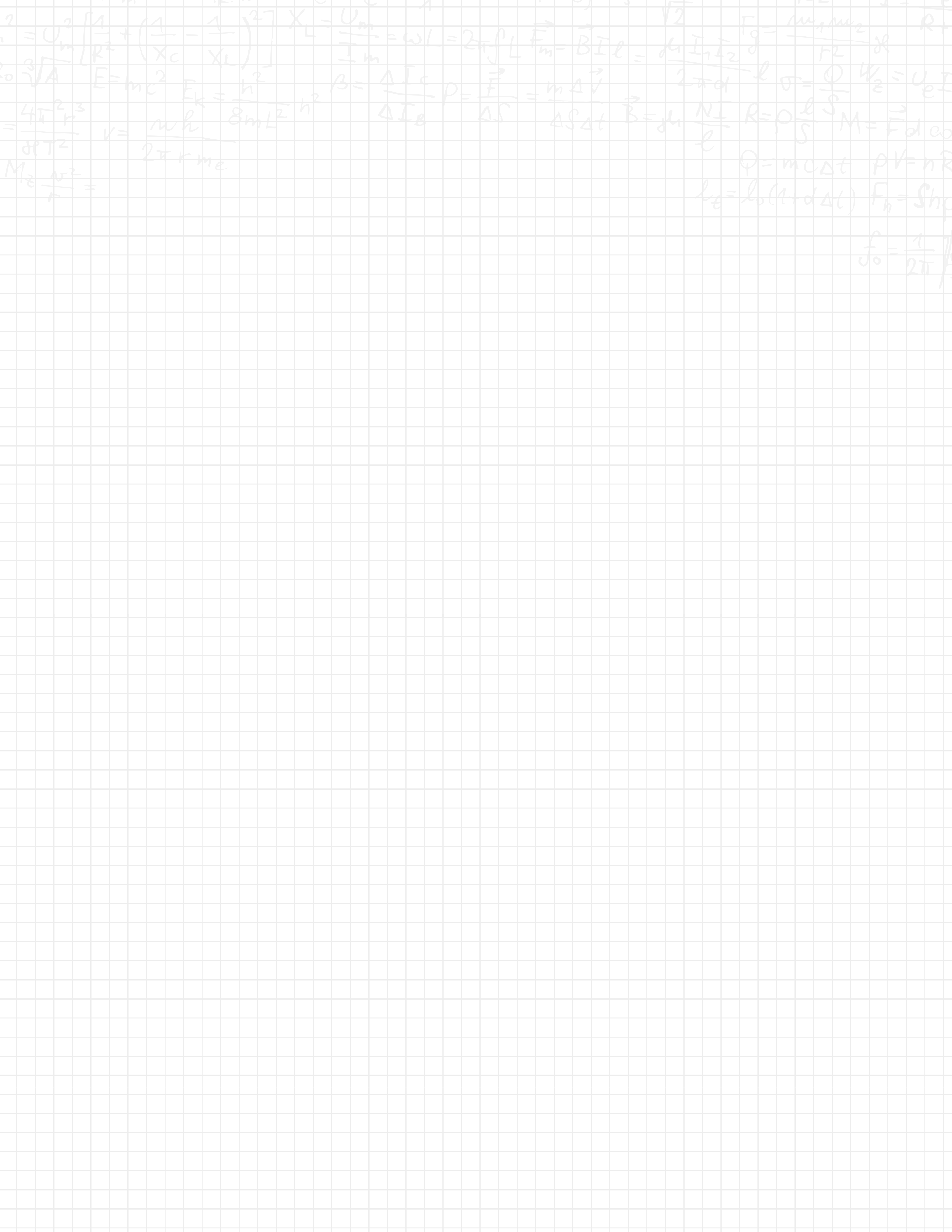
Ahora, si un punto se encuentra situado a 15m de alguna de las torres entonces estará ubicado sobre el eje X en un punto con coordenadas $(-75+15,0)$ o $(75-15,0)$, es decir $(-60,0)$ o $(60,0)$. En cualquier caso, la altura de la parábola corresponderá a:

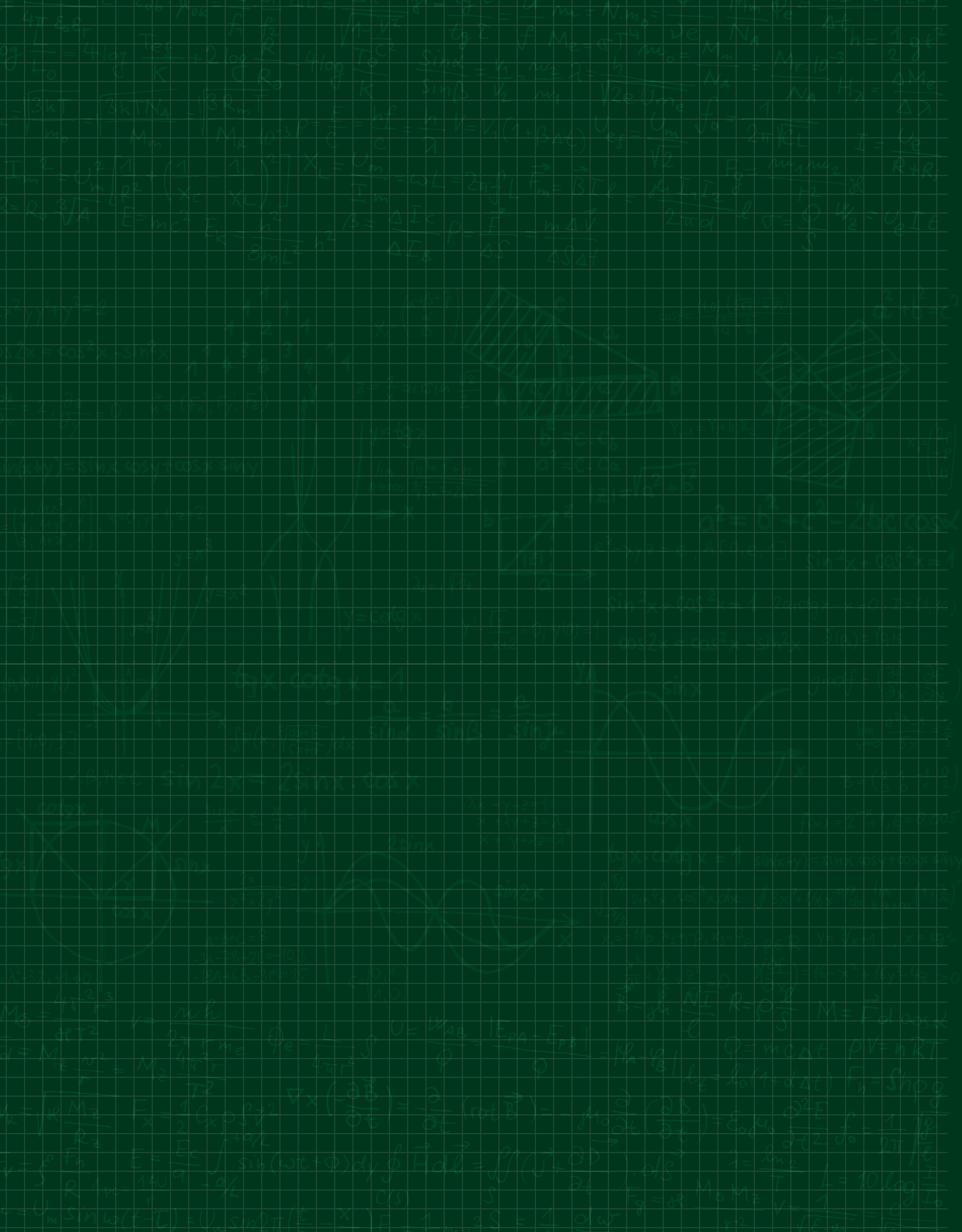
$$h=7+\frac{60^2}{375}=7+\frac{48}{5}=\frac{83}{5}\text{metros}$$

REFERENCIAS

1. Nociones básicas de Aritmética, Geometría, Álgebra, Trigonometría y Geometría analítica, Pre cálculo, Red Matemática Antioquia, 2014.
2. Resolución de Problemas Matemáticos José Heber Nieto Said, 2010.
3. El Circo matemático, Martin Gardner, preparado por Patricio Barrios.
4. Pisa 2003, Pruebas de Matemáticas y solución de problemas, Madrid 2005, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). Ministerio de Educación y Ciencia de España.
5. 150 Problemas de olimpiadas matemáticas cochabambinas, Álvaro H. Carrasco C., Carlos E Gonzales C, 2010.
6. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Pruebas de 1982 -1983, Universidad Antonio Nariño.
7. Resolución de Problemas, Ministerio de Educación del Perú, http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/
8. Olimpiadas Matemáticas de México, http://ichi.fismat.umich.mx/recursos/prob15/
9. Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas, Francisco Javier Garcia Capitán, pacoga@ctv.es, Priego de Córdoba, 2002.
10. Olimpiadas Españolas de Matemáticas: Problemas y Soluciones 1998 a 2014, http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimmain.htm
11. Preguntas PISA, ciclos anteriores, (PISA 2000 – PISA 2006), Alfabetización matemática, Perú.
12. Olimpiada Costarricense de Matemáticas, 2011, Christopher Trejos Castillo, Álgebra.
13. Olimpiadas Matemáticas 2012, (OJM, OM, OMCC, OIM, IMO), Problemas y Soluciones, José H Nieto S, Rafael Sánchez L, Laura Vielma H.
14. Problemas Resueltos de Funciones, Para: Cálculo Diferencial, Dr. José Luis Díaz Gómez.









"Mi consejo es uno: Aférrense con todas sus fuerzas y convicción a la educación. No desfallezcan; estudien mucho. El futuro no lo sabemos pero, con certeza, si nos educamos será mucho mejor".

Sergio Fajardo





GOBERNACIÓN DE ANTIOQUIA
República de Colombia